$$\alpha \approx \frac{4}{\omega_n} \ln \left| \frac{\breve{K}(\omega_n/2)}{\breve{K}(\omega_n)} \right|. \qquad (10)$$

В ряде случаев известна не $\breve{K}(\omega)$, а функция влияния $K(s)$. Аппроксимируя $K(s)$ функцией $q(x)$ из (5) и рассматривая $K(s)$ на уровне полуширины функции влияния, т.е. $K(s_0) = 1/2K(0)$, находим $\alpha = s_0$, где $2s_0$ - размер пятна рассеяния оптического звена на уровне 1/2 высоты функции влияния.

Полученные зависимости для $M(\omega)$ и α позволяют уменьшить поле искомых значений параметра и, тем самым, сократить объем вычислений.

Литература.

1. Креков Г.М., Орлов В.М., Белов В.В., и др. Имитационное моделирование в задачах оптического дистанционного зондирования. Новосибирск: Наука, 1988. 185 с.

2. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А., Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.

3. Росс Ю.К., Князихин Ю.В., Кууск А.Э. и др. Математическое моделирование переноса радиации в растительных средах. С.-П.: Гидрометеоиздат, 1990. 198 с.

4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.

5. Грынь В.И. О двухшаговых итерационных методах регуляризации// Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1992. Т. 32. №11. С. 1821-1824.

6. Семенчева О.П., Смолик Ч.К. Решение одномерных интегральных уравнений первого рода типа свертки совместным применением метода регуляризации А.Н. Тихонова и метода экстраполяции// Весці АН БССР. 1990. №6. С. 117.

7. О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику. М.: Мир, 1966. 254 с.

МЕТОД ПРОГОНКИ ДЛЯ ПЯТИДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Н.А. Илючик, В. М. Мадорский

(БрГУ, г. Брест)

Рассмотрим краевую периодическую задачу Дуффинга:

$$x'' + \alpha x' + \beta x^m + \gamma x = F(\sin t, \cos t) \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 x(a) + \beta_1 x'(a) = A_1, \\ \alpha_2 x(b) + \beta_2 x'(b) = A_2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Заменив дифференциальную краевую задачу ее разностной аппроксимацией на сетке, получим систему нелинейных уравнений. При решении нелинейной системы квазиньютоновскими методами на каждой итерации необходимо решать линейную систему, матрица которой представляет собой матрицу Якоби системы нелинейных уравнений и является диагональной, причем количество диагоналей матрицы равно количеству точек, по которым были аппроксимированы производные. Если исходная матрица содержит n диагоналей, то при применении регуляризованных алгоритмов [1] используют матрицу, которая содержит (2n-1) диагоналей.

Так как производная функции, как правило, изменяется более плавно, чем сама функция, то для расчетов мы можем использовать матрицу Якоби, которая бы получалась при аппроксимации производных по трём точкам, а функцию и производные, участвующие в задаче, будем аппроксимировать по большему количеству точек. Данный подход, насколько известно автору, на практике применяется впервые. При таком подходе мы практически не проигрываем в точности, но при этом можем очень значительно (на порядки) сократить количество операций, а значит и время решения задачи. Эта экономия возможна вследствие того, что матрица Якоби при таком подходе будет трехдиагональной, а матрица $\overline{f'(x_n)}f'(x_n)$ пятидиагональной, следовательно, при решении линейной системы мы можем использовать вместо метода Гаусса метод матричной прогонки, который учитывает специфику таких систем и является очень быстрым.

Метод трёхдиагональной прогонки достаточно широко освещен в литературе [2]. Гораздо больший интерес представляет метод пятидиагональной прогонки, которого нет в известной автору литературе.

Метод прогонки для пяти-диагональной матрицы

Пусть необходимо найти решение системы n линейных уравнений с n неизвестными, причем матрица системы имеет пяти-диагональный вид.

$$\begin{cases} c_1x_1 + d_1x_2 + e_1x_3 = g_1, \\ b_2x_1 + c_2x_2 + d_2x_3 + e_2x_4 = g_2, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4 + e_3x_5 = g_3, \\ \qquad a_4x_2 + b_4x_3 + c_4x_4 + d_4x_5 + e_4x_6 = g_4, \\ \qquad\qquad a_5x_3 + b_5x_4 + c_5x_5 + d_5x_6 + e_5x_7 = g_5, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{n-2}x_{n-4} + b_{n-2}x_{n-3} + c_{n-2}x_{n-2} + d_{n-2}x_{n-1} + e_{n-2}x_n = g_{n-2}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n-1}x_{n-3} + b_{n-1}x_{n-2} + c_{n-1}x_{n-1} + d_{n-1}x_n = g_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_nx_{n-2} + b_nx_{n-1} + c_nx_n = g_n. \end{cases} \tag{3}$$

Метод прогонки состоит из двух этапов – прямой прогонки и обратной.

<u>1 этап</u>: прямая прогонка

Прямая прогонка состоит в том, что каждое неизвестное x_i выражается через x_{i+1} и x_{i+2} с помощью прогоночных коэффициентов A_i, B_i, C_i:

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i x_{i+2} + C_i,\ i = 1,\ 2, \dots,\ n-2. \tag{4}$$

Из первого уравнения системы (3) найдём: $x_1 = -\dfrac{d_1}{c_1}x_2 - \dfrac{e_1}{c_1}x_3 + \dfrac{g_1}{c_1}$.

С другой стороны, в силу (4) $x_1 = A_1x_2 + B_1x_3 + C_1$. Приравнивая коэффициенты в обоих выражениях для x_1, имеем, $A_1 = -d_1/c_1$, $B_1 = -e_1/c_1$, $C_1 = g_1/c_1$.

Выразим из второго уравнения системы (3) x_2, заменяя x_1 по формуле (4):

$$x_2 = -\frac{b_2}{c_2}x_1 - \frac{d_2}{c_2}x_3 - \frac{e_2}{c_2}x_4 + \frac{g_2}{c_2} = -\frac{b_2}{c_2}(A_1x_2 + B_1x_3 + C_1) - \frac{d_2}{c_2}x_3 - \frac{e_2}{c_2}x_4 + \frac{g_2}{c_2} =$$

$$= -\frac{b_2}{c_2}A_1x_2 - \frac{b_2}{c_2}B_1x_3 - \frac{b_2}{c_2}C_1 - \frac{d_2}{c_2}x_3 - \frac{e_2}{c_2}x_4 + \frac{g_2}{c_2}.$$

Приводя подобные слагаемые, имеем выражение для x_2:

$$x_2 = -\frac{b_2B_1 + d_2}{(c_2 + b_2A_1)}x_3 - \frac{e_2}{(c_2 + b_2A_1)}x_4 + \frac{g_2 - b_2C_1}{(c_2 + b_2A_1)}.$$

Отсюда получаем прогоночные коэффициенты для x_2:

$$A_2 = -\frac{b_2B_1 + d_2}{(c_2 + b_2A_1)},\ B_2 = -\frac{e_2}{(c_2 + b_2A_1)},\ C_2 = \frac{g_2 - b_2C_1}{(c_2 + b_2A_1)}.$$

Аналогично можно вычислить прогоночные коэффициенты для любого номера *i*: $A_i = \dfrac{-a_iA_{i-2}B_{i-1} - b_iB_{i-1} - d_i}{p_i}$, $B_i = -\dfrac{e_i}{p_i}$, $C_i = \dfrac{-a_i(A_{i-2}C_{i-1} + C_{i-2}) - b_iC_{i-1} + g_i}{p_i}$, где

$$p_i = c_i + a_i(A_{i-2}A_{i-1} + B_{i-2}) + b_iA_{i-1},\ i = 3,\ 4, \dots,\ n-2.$$

<u>2 этап:</u> обратная прогонка

Обратная прогонка состоит в последовательном вычислении неизвестных x_i. Воспользуемся формулой (4) при *i=n-2* и последним уравнением системы (3).

$$x_{n-2} = A_{n-2}x_{n-1} + B_{n-2}x_n + C_{n-2}$$

$$a_nx_{n-2} + b_nx_{n-1} + c_nx_n = g_n.$$

Подставив первое уравнение во второе, получим:

$$(a_nA_{n-2} + b_n)x_{n-1} + (a_nB_{n-2} + c_n)x_n = g_n - a_nC_{n-2} \tag{5}$$

Рассмотрим предпоследнее уравнение системы:

$$a_{n-1}x_{n-3}+b_{n-1}x_{n-2}+c_{n-1}x_{n-1}+d_{n-1}x_n=g_{n-1}$$

Заменяя в этом уравнении x_{n-3}, x_{n-2} по формуле (4), имеем:

$$(a_{n-1}A_{n-3}+b_{n-1})(A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}x_n+C_{n-2})+(a_{n-1}B_{n-3}+c_{n-1})x_{n-1}+d_{n-1}x_n=g_{n-1}-a_{n-1}C_{n-3}$$

Обозначим $s=a_{n-1}A_{n-3}+b_{n-1}$, тогда последнее равенство перепишется в виде: $s(A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}x_n+C_{n-2})+(a_{n-1}B_{n-3}+c_{n-1})x_{n-1}+d_{n-1}x_n=g_{n-1}-a_{n-1}C_{n-3}$

$$(sA_{n-2}+a_{n-1}B_{n-3}+c_{n-1})x_{n-1}+(sB_{n-2}+d_{n-1})x_n=g_{n-1}-a_{n-1}C_{n-3}-sC_{n-2} \qquad (6)$$

Таким образом, используя (5) и (6), получили систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}(a_nA_{n-2}+b_n)x_{n-1}+(a_nB_{n-2}+c_n)x_n=g_n-a_nC_{n-2}\\(sA_{n-2}+a_{n-1}B_{n-3}+c_{n-1})x_{n-1}+(sB_{n-2}+d_{n-1})x_n=g_{n-1}-a_{n-1}C_{n-3}-sC_{n-2}\end{cases}$$

Вводя обозначения: $A_{n-1}=a_nA_{n-2}+b_n$, $B_{n-1}=a_nB_{n-2}+c_n$, $C_{n-1}=g_n-a_nC_{n-2}$

$$A_n=sA_{n-2}+a_{n-1}B_{n-3}+c_{n-1},\ B_n=sB_{n-2}+d_{n-1},\ C_n=g_{n-1}-a_{n-1}C_{n-3}-sC_{n-2}$$

получим, что последняя система запишется в виде:

$$\begin{cases}A_{n-1}x_{n-1}+B_{n-1}x_n=C_{n-1}\\A_nx_{n-1}+B_nx_n=C_n\end{cases}$$

Найдём отсюда x_{n-1}, x_n: $x_{n-1}=\dfrac{C_{n-1}-B_{n-1}x_n}{A_{n-1}}$, $x_n=\dfrac{C_nA_{n-1}-A_nC_{n-1}}{B_nA_{n-1}-B_{n-1}A_n}$.

Далее, используя формулу (4) и найденные на первом этапе значения прогоночных коэффициентов, последовательно вычисляем все неизвестные $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1$.

Подсчёт числа операций умножения и деления.

Нетрудно подсчитать число действий умножения и деления, необходимых для решения системы (3) с помощью метода прогонки. Получим, что при реализации метода прогонки для пяти-диагональной матрицы выполняется $14n$ операций умножения и деления. Для сравнения отметим, что при использовании метода Гаусса число действий умножения и деления близко к $2n^3/3$. Естественно, если матрица системы позволяет использовать метод прогонки, то следует использовать именно его.

Литература.

1. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона. // Журнал «Вычисл. матем. и матем. физ.», 1981, Т.21, №2, с.491—497.

2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.—М.: Наука, 1989.- 432с.