

Выражая из (15) k/n , будем иметь так называемую интегральную частотную функцию, нормированную на единицу:

$$F_{\text{ч}}(x) = 1 - \exp(-x/x_{\text{ср}}). \quad (16)$$

Дифференцируя по x , получим дифференциальную частотную функцию:

$$f_{\text{ч}}(x) = \exp(-x/x_{\text{ср}}) / x_{\text{ср}}. \quad (17)$$

Частотные функции применяются при количественном описании результатов наблюдения материалов под микроскопом.

Интегрируя (15) по k и умножая на Π/L , будем иметь интегральную функцию распределения объема пор по размерам для одномерной модели, представляющей материал в виде плоских параллельных слоев:

$$F_V(x) = \Pi \{ 1 - (1 + x/x_{\text{ср}}) \exp(-x/x_{\text{ср}}) \}, \quad (18)$$

где Π – пористость материала.

Дифференцируя (18) по x , получим дифференциальную функцию распределения объема пор по размерам:

$$f_V(x) = \Pi \exp(-x/x_{\text{ср}}) x / x_{\text{ср}}^2. \quad (19)$$

Функции распределения пор по размерам получаются в результате проведения экспериментов по ртутной порометрии.

Результаты вычислительного эксперимента, моделирующего случайное разбиение отрезка, показали, что формулы (11) и (15) действительно представляют математическое ожидание разбиения отрезка равномерно распределенными точками. Опытные данные для бетона и пенопластов подтверждают пригодность формул (11), (16) и (17) для практических расчетов.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ

А.К. Васечко
(ГрГУ, г. Гродно)

1. Введение. Электроимпедансный томограф открывает много возможностей для исследования внутренних структур, но он не используется широко в практической медицине. На самом деле считается, что существующие системы электроимпедансных изображений должны предлагать, так называемые, дина-

мические изображения (визуальное наблюдение изображения различий двух измерений). В медицине предпочтение отдается статическим или абсолютным изображениям. В электроимпедансной томографии (ЭИТ), получение таких изображений усложнено, так как необходимо получить набор данных, соответствующих однородному участку удельной электропроводности объекта.

Поскольку, на практике электроды томографа зафиксированы непосредственно на коже пациента, то кажется маловероятным получение дополнительных данных для измерений, соответствующих форме тела пациента ни с помощью подбора необходимой формы поверхности однородной удельной электропроводности, ни с помощью численного решения прямой задачи с соответствующими граничными условиями. Использование контейнера цилиндрической формы заполненного проводящей жидкостью, в которую погружается пациент также неподходяще, так как сводятся к нулю преимущества метода: относительная простота медицинского обследования и минимум неудобств пациенту.

В статье описывается алгоритм восстановления распределения сопротивления поперечного сечения человеческого тела по результатам измерения потенциала на электродах, расположенных на поверхности тела человека.

2. Математическая модель для ЭИТ и регуляризация Тихонова. Наиболее точная математическая модель электроимпедансной томографии, называемая полной электродной моделью, может быть записана в форме:

$$\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = U_l, \quad x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \quad (2)$$

$$\int_{e_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = I_l, \quad x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \quad (3)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l, \quad (4)$$

Здесь Ω – исследуемое тело, L – число электродов на поверхности тела, e_l – l -тый электрод, x – элементарный участок исследуемой модели, σ – проводимость, z_l – контактное сопротивление между l -ым электродом и телом, $u = u(x)$ – это электрический потенциал, который возникает на элементарном участке, U_l – потенциал на электродах, I_l – ток, проникаемый с электродов.

Прямая задача (1-4) решается методом конечных элементов (МКЭ). В случае, когда сетка МКЭ состоит из треугольных элементов распределение сопротивления можно аппроксимировать в пространстве Соболева $W_1^1[\Omega]$. Сопротивление в этом пространстве будет непрерывным и дифференцируемым в смысле Лебега.

Наблюдаемая физическая модель для ЭИТ имеет вид:

$$V = U(\rho) + \varepsilon \quad (5)$$

где $U(\rho)$ – вектор напряжений, получаемый путем решения модели (1-4), при известном распределении сопротивления ρ , V – напряжение на электродах, снимаемое с прибора, ε – измеряемый шум. Нелинейная относительно ρ модель $U(\rho)$ может быть локализована относительно ρ_0 по формуле Тейлора [2]:

$$U(\rho) = U(\rho_0) + J(\rho_0)(\rho - \rho_0) \quad (6)$$

где $U(\rho_0)$ – вектор напряжения для распределения сопротивления ρ_0 , $J(\rho_0)$ – Якобиан U при $\rho = \rho_0$.

Регуляризация Тихонова для задачи ЭИТ заключается в минимизации функционала:

$$\min_{\sigma} \{ \|V - U(\rho_0) + J(\rho_0)\rho_0 - J(\rho_0)\rho\|^2 + W(\rho) \}, \quad (7)$$

где $W(\rho)$ – стабилизирующий функционал, имеющий вид:

$$W(\rho) = \alpha^2 \|L(\rho - \rho_*)\|^2 \quad (8)$$

где α и L – параметр и матрица регуляризации соответственно, ρ_* – вектор, аппроксимирующий искомое решение. В качестве L зачастую выбирается единичная матрица [2].

3. Численные результаты. Скорость сходимости процесса зависит от выбора начального приближения, поэтому положим, $\sigma=1$ (Ом)⁻¹ и предварительно рассчитаем начальное распределение ρ_0 . Из формулы $U=RI$, где U – напряжение, R – сопротивление, I – сила тока получаем:

$$V = \rho_0 \times I \quad (9)$$

$$U_{\sigma=1} = \rho_{\sigma=1} \times I \quad (10)$$

где V – напряжение на электродах, снимаемое с прибора, ρ_0 – искомое распределение сопротивления, $U_{\sigma=1}$ – вектор напряжений на электродах, получаемый путем решения (1-4) при $\sigma=1$ (Ом)⁻¹, $\rho_{\sigma=1}$ – это сопротивление соответ-

вующее проводимости σ : $\rho_{\sigma=1} = 1/\sigma = 1$ Ом, I – это распределение тока на электродах. С учетом этого, получаем начальное сопротивление:

$$\rho_0 = \frac{V}{U_{\sigma=1}}$$

На каждом шаге решения обратной задачи надо находить решение прямой задачи (1-4) и Якобиан (6). Решение задачи – распределение сопротивления в плоском сечении тела – используется для построения плоского изображения этого сопротивления.

Предлагаемая методика решения поставленной задачи проверена расчетами в системе MATLAB 5.2. Модельное изображение задавалось на треугольной сетке, состоящей из 425 узлов и 784 элементов. Была задана реальная проводимость тела и неоднородности, что позволило получить данные (V) для обратной задачи. Восстановление изображения проводилось в три итерации с начальной проводимостью $\sigma=1$ (Ом)⁻¹ и параметром регуляризации $\alpha=0,000005$. Параметр регуляризации подбирался визуально, с учетом получаемого качества изображения. Ошибка восстановления сопротивления составила $\approx 1-2\%$. Образ восстанавливался с предположением о цилиндрической геометрии объекта (торс тела) для лучшего восприятия (Рис.1).

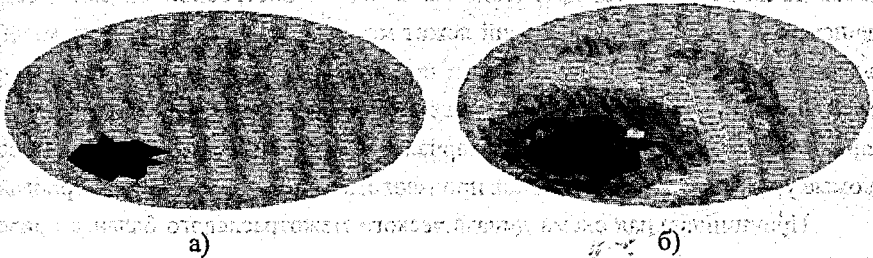


Рис.1. Восстановление распределения сопротивления на модельном примере.
а) – исходное изображение, б) – полученный результат.

В заключение отметим, что качество получаемого изображения может быть улучшено за счет получения образов на различных частотах томографа с последующим их наложением друг на друга, например, системой GRASS.

Литература.

1. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988.
2. Р. Hua, J.G. Webster, and W.J. Tompkins, "A regularised electrical impedance tomography reconstruction algorithm", Clin Phys Physiol Meas, Suppl A, vol. 9, pp. 137–141, 1988.