ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ МИКРОСТРУКТУРЫ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А.Р. Афонин

(БГТУ, г. Брест)

Большинство строительных материалов имеют сложную микроструктуру, в которую входят поры и скелет материала, содержащий, как правило, разнородные включения. Среди способов количественного описания микроструктуры материалов наиболее широко применяются два. Первый способ состоит в измерении распределения пор по радиусам с помощью, например, ртутной интрузии. Второй способ заключается в наблюдении под микроскопом и измерении линейных размеров сечений частиц (пор) материала, находящихся на прямолинейном отрезке. Появляется естественный вопрос, каким должно быть распределение пор по радиусам или же распределение линейных размеров сечений частиц при предположении, что частицы (поры) распределены наиболее хаотично.

По-видимому, простейшей моделью, описывающей хаотичное распределение пор по размерам, является одномерная модель, представляющая материал в виде плоских параллельных слоев скелета, разграниченных такими же плоскими параллельными порами. В этом случае структура материала определяется распределением длин сечений пор (или скелета), расположенных на прямолинейном отрезке, перпендикулярном плоским слоям вещества. При наблюдении материала под микроскопом основной характеристикой структуры также является распределение длин сечений на прямолинейном отрезке.

Предположим, что распределение длин сечений одной компоненты материала (например, пор) не зависит от распределения длин сечений остальных компонент (например, элементов скелета). Таким образом, рассматривая распределение одной компоненты, можно удалить все остальные, заменив их точками на отрезке. Полученная структура распределения изучаемой компоненты представляет собой отрезок, разбитый на части точками. Предположим также, что точки, лежащие на отрезке, распределены по нему независимо одна от другой и равномерно, что соответствует максимальной хаотичности.

Пусть отрезок длины L разбит на n отрезочков с длинами $x_k \geq 0$ (k=1,...,n):

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = L. \tag{1}$$

Упорядочим отрезочки по возрастанию длины:

$$x_k \leq x_{k+1},\ (k=1,\dots,n-1). \tag{2}$$

Выражая x_n из (1), получим систему неравенств, описывающую область в n-1 – мерном пространстве, каждая точка которой представляет собой один из вариантов разбиения:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0; \\ x_k \leq x_{k+1},\ (k=1,\dots,n-2); \\ x_{n-1} \leq L - \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i. \end{cases} \tag{3}$$

Нас будет интересовать математическое ожидание такого упорядоченного разбиения. Иными словами, будем искать центр масс области (3), исходя из того, что точки в n-1 – мерном пространстве распределены равномерно:

$$x_{n,k}^{c} = \frac{I_{n,k}}{V_n}, \tag{4}$$

где $x_{n,k}^{c}$ – проекция центра масс на k-ю ось координат;

V_n – объем области (3);

$I_{n,k}$ – момент первого порядка относительно k-й оси.

Величины V_n и $I_{n,k}$ даются интегралами по области (3):

$$V_n = \int\limits_{0}^{\frac{1}{n}L} dx_1 \cdots \int\limits_{x_{m-1}}^{\frac{1}{n-m+1}\left(L-\sum\limits_{i=1}^{m-1} x_i\right)} dx_m \cdots \int\limits_{x_{n-2}}^{\frac{1}{2}\left(L-\sum\limits_{i=1}^{n-2} x_i\right)} dx_{n-1}, \tag{5}$$

$$I_{n,k} = \int\limits_{0}^{\frac{1}{n}L} dx_1 \cdots \int\limits_{x_{m-1}}^{\frac{1}{n-m+1}\left(L-\sum\limits_{i=1}^{m-1} x_i\right)} dx_m \cdots \int\limits_{x_{n-2}}^{\frac{1}{2}\left(L-\sum\limits_{i=1}^{n-2} x_i\right)} dx_{n-1} x_k. \tag{6}$$

Опуская выкладки, запишем результаты интегрирования:

$$V_n = \frac{L^{n-1}}{n!(n-1)!}, \qquad (7)$$

$$I_{n,1} = \frac{L^n}{(n!)^2 n}, \qquad (8)$$

$$I_{n,k+1} = \frac{1}{(n-k)^2}\left[LV_n + (n-k-1)(n-k)I_{n,k} - \sum_{i=1}^{k} I_{n,i}\right]. \qquad (9)$$

Разделив (8) и (9) на V_n из (7), получим искомое среднее распределение упорядоченных по возрастанию отрезочков в виде рекуррентной зависимости:

$$x^c_{n,1} = \frac{L}{n^2}, \qquad (10)$$

$$x^c_{n,k+1} = \frac{1}{(n-k)^2}\left(L - \sum_{i=1}^{k} x^c_{n,i}\right) + x^c_{n,k}\left(1 - \frac{1}{n-k}\right). \qquad (11)$$

Практический интерес представляет ситуация, когда n>>1. В этом случае можно заменить сумму в (11) интегралом, а разность $x^c_{n,k+1} - x^c_{n,k}$ – производной $\frac{dx^c_{n,k}}{dk}$, считая при этом, что di=dk=1<<n:

$$\frac{dx^c_{n,k}}{dk} - \frac{1}{(n-k)^2}\left(L - \int_1^k x^c_{n,i} di\right) + \frac{x^c_{n,k}}{n-k} = 0. \qquad (12)$$

Умножая (12) на $(n-k)^2$ и дифференцируя по k, получим дифференциальное уравнение

$$(n-k)\frac{d^2 x^c_{n,k}}{dk^2} - \frac{dx^c_{n,k}}{dk} = 0, \qquad (13)$$

решение которого, учитывая (10) и условие (1), записанное как

$$\int_1^n x^c_{n,k} dk = L, \qquad (14)$$

имеет вид:

$$x^c_{n,k} = x_{cp} \ln\frac{n}{n-k}, \qquad (15)$$

где $x_{cp} = L/n$ – средний размер отрезочка.

Выражая из (15) k/n, будем иметь так называемую интегральную частотную функцию, нормированную на единицу:

$$F_ч(x)=1-\exp(-x/x_{ср}). \tag{16}$$

Дифференцируя по x, получим дифференциальную частотную функцию:

$$f_ч(x)=\exp(-x/x_{ср})/x_{ср}. \tag{17}$$

Частотные функции применяются при количественном описании результатов наблюдения материалов под микроскопом.

Интегрируя (15) по k и умножая на П/L, будем иметь интегральную функцию распределения объема пор по размерам для одномерной модели, представляющей материал в виде плоских параллельных слоев:

$$F_V(x)=П[1-(1+x/x_{ср})\exp(-x/x_{ср})] \quad , \tag{18}$$

где П – пористость материала.

Дифференцируя (18) по x, получим дифференциальную функцию распределения объема пор по размерам:

$$f_V(x)=П\exp(-x/x_{ср})x/x_{ср}^2. \tag{19}$$

Функции распределения пор по размерам получаются в результате проведения экспериментов по ртутной порометрии.

Результаты вычислительного эксперимента, моделирующего случайное разбиение отрезка, показали, что формулы (11) и (15) действительно представляют математическое ожидание разбиения отрезка равномерно распределенными точками. Опытные данные для бетона и пенопластов подтверждают пригодность формул (11), (16) и (17) для практических расчетов.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ

А.К. Васечко

(ГрГУ, г. Гродно)

1. Введение. Электроимпедансный томограф открывает много возможностей для исследования внутренних структур, но он не используется широко в практической медицине. На самом деле считается, что существующие системы электроимпедансных изображений должны предлагать, так называемые, дина-