РЕКУРРЕНТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

А.М. Астахов

(ГрГУ, г. Гродно)

Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания (МО), в которой обслуживаются r типов заявок. Системы обслуживания (СМО) сети являются многолинейными. Дисциплины обслуживания в системах – FIFO. Обслуживание в СМО - произвольное. В докладе рассмотрен случай, когда времена обслуживания заявок одного типа в каждой линии СМО распределены по одинаковым законам, а заявки после обслуживания в СМО могут изменить свой тип. Такие сети являются математическими моделями различных объектов в экономике, страховании.

Для исследования таких сетей строятся приближенные рекуррентные по числу заявок и по моментам времени методы. Методы позволяют находить средние характеристики функционирования сети, такие как среднее время обслуживания заявок различных типов в системах сети, среднюю длину очередей, среднее число занятых линий обслуживания. Кроме того, данные методы позволяют определить среднее число заявок каждого типа в сети.

Разобьем множество возможных пар (i,c), где i - номер СМО, c - тип заявки, на взаимно непересекающиеся классы по следующему правилу: пары (i,c) и (j,s) принадлежат одному классу, если вероятность того, что после некоторого числа переходов заявка типа c из i-й СМО станет заявкой типа s в j-й СМО, не равна 0. Заметим, что число заявок внутри класса постоянно. Пусть μ_{ic} - интенсивность обслуживания заявок типа c в каждой линии i-й СМО, $i=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$. Обозначим через K^g - число заявок в g-м классе, $g=\overline{1,q}$, $\sum\limits_{g=1}^{q}K^g=K$, $\overline{K}=(K^1,K^2,...,K^q)$; J_i^g - множество всех типов заявок, входящих в i-ю СМО класса g, I^g - множество индексов всех СМО, обслуживающих заявки g-го класса, G_i - множество всех классов заявок, обслуживающихся в i-й СМО; τ_{ic} - среднее время обслуживания заявки типа c в i-й СМО; p_{icjs} - вероятность того, что после обслуживания в i-й СМО заявка типа c перейдет на обслуживание в j-ю СМО как заявка типа s, типа c перейдет на обслуживание в j-ю СМО как заявка типа s, $\sum\limits_{s=1}^{r} p_{icjs}=1$, $i=\overline{1,n}$, $c \in J_i^{G_i}$, $j=\overline{1,n}$; $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{icjs}=1$, $i=\overline{1,n}$, $c \in J_i^{G_i}$, $s=\overline{1,r}$; $\rho_i(\overline{K})$ - среднее число занятых линий в i-й СМО, когда в сети обслуживается K^g заявок g-го класса, $g=\overline{1,q}$. И пусть также $N_{ic}(\overline{K})$, $T_{ic}(\overline{K})$ - соответственно среднее число заявок типа c (ожидающих и обслуживающихся) и среднее время пребывания заявок типа c (включая ожидание) в i-й системе в стационарном режиме, когда в ней обслуживается K^g заявок g-го класса, $g=\overline{1,q}$.

Метод, рекуррентный по числу заявок.

Для нахождения средних характеристик сети можно составить следующие, рекуррентные по числу заявок в сети соотношения:

1. Полагаем $k^g=0$, $g=\overline{1,q}$, $N_i(E_0)=0$, $\rho_i(E_0)=\rho_i^*$, $i=\overline{1,n}$, в качестве ρ_i^* можно взять, например, 1.

2. Выбираем класс заявки g^*, пользуясь правилом получения дискретной случайной величины, которая принимает значение g^* с вероятностью

$$p_{g^*}=\frac{K_{g^*}-k_{g^*}}{K-k},\ g^*=\overline{1,q},\ \sum_{g=1}^{q} p_g=1.$$

3. Вводим в сеть новую заявку класса g^* и полагаем $k_{g^*}=k_{g^*}+1$.

4. Вычисляем $\rho_i(\overline{k})=\min\{N_i(\overline{k}),m_i\}$, $\rho_{ic}(\overline{k})=N_{ic}(\overline{k})\dfrac{\rho_i(\overline{k})}{\sum\limits_{s=1}^{r} N_{is}(\overline{k})}$, $i \in I^{g^*}$.

5. Находим $T_{ic}(\overline{k})=\tau_{ic}(\overline{k})+$

$$+\frac{\sum\limits_{s=1}^{r}\tau_{is}(\overline{k})(N_{is}(\overline{k})-\rho_{is}(\overline{k}))+\sum\limits_{s=1}^{r}\rho_{is}(\overline{k})\dfrac{M_{is}[t^2]}{2\tau_{is}(\overline{k})}}{\rho_i(\overline{k})},\ i \in I^{g^*}.$$

6. Вычисляем $N_{ic}(\bar{k})=\dfrac{K^g T_{ic}(\bar{k})}{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{s\in J_j^{G_j}} T_{js}(\bar{k})e_{jsic}}$, $i\in I^{g^*}$.

7. Находим $N_i(\bar{k})=\sum\limits_{c=1}^{r} N_{ic}(\bar{k})$ $i\in I^{g^*}$.

8. Средние характеристики СМО с номерами $i\notin I^{g^*}$ на данном шаге итерации не меняются.

9. Переходим к пункту 2.

<u>Метод, рекуррентный по моментам времени</u>.

Рассмотрим метод, рекуррентный по моментам времени. Предположим, что сеть функционирует на большом промежутке времени $[0,T]$. Пусть $M_i(t)$ - средняя интенсивность потока заявок из i-й СМО на интервале времени $[0,t]$, а $N_{ic}(\bar{K},t)$, $N_i(t)$, $T_{ic}(t)$, $\rho_i(t)$ - соответственно среднее число заявок типа c, среднее число заявок, среднее время пребывания заявок, среднее число занятых линий заявками типа c и всеми заявками в i-й СМО сети на интервале времени $[0,t]$, $t<T$, когда в ней обслуживаются $\bar{K}$ заявок.

Для нахождения средних характеристик можно составить следующие, рекуррентные по t соотношения:

1. Вычисляем $\rho_i(t)=\min\{N_i(t),m_i\}$, $\rho_{ic}(t)=N_{ic}(t)\dfrac{\rho_i(t)}{\sum\limits_{s=1}^{r} N_{is}(t)}$, $i=\overline{1,n}$.

2. Находим $T_{ic}(t)=\tau_{ic}+\dfrac{\sum\limits_{s=1}^{r}\tau_{is}(N_{is}(t)-\rho_{is}(t))+\sum\limits_{s=1}^{r}\rho_{is}(t)\dfrac{M_{is}[t^2]}{2\tau_{is}}}{\rho_i(t)}$, $i=\overline{1,n}$.

3. Вычисляем $N_{ic}(t+1)=\dfrac{K^g T_{ic}(t)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{s\in J_j^{G_j}} T_{js}(t)e_{jsic}}$, $g=\overline{1,q}$, $i\in I^g$.

4. Находим $N_i(t+1)=\sum\limits_{c=1}^{r} N_{ic}(t+1)$, $i=\overline{1,n}$.

5. Переходим к шагу 1.

За начальные распределение заявок по системам сети можно взять любые значения $N_{ic}(0) \neq 0$ таким образом, чтобы $\sum_{i=1}^{n} \sum_{c=1}^{r} N_{ic}(0) = K$, где $K = \sum_{g=1}^{q} K^{g}$ - число заявок в сети.

Если надо найти, например, среднее число заявок типа c в стационарном режиме, то правилом остановки будет выполнение неравенства $\max_{i} \left| N_{ic}(t) - N_{ic}(t-1) \right| < \varepsilon$, где ε-заданная точность, $N_{ic}(t-1)$ - число заявок типа c в i-й СМО на предыдущей итерации метода.

Рассмотренные методы применялись для исследования сетей с центральной системой обслуживания и 10-ю периферийными СМО. Результаты расчетов средних характеристик функционирования сети сравнивались с результатами имитационного моделирования. Эксперименты показали, что методы обладают достаточно высокой точностью.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

Н.Г. Бородулина, А.В. Морской

(ГрГУ, г. Гродно)

Часто на практике возникает задача о нахождении характеристических значений некоторой наперёд заданной матрицы численными методами.

Пусть задана некоторая матрица $\mathrm{A} = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n$, где M_n – пространство квадратных матриц порядка n над полем P, $\mathrm{E}_k(\mathrm{A})$ – сумма различных главных миноров порядка k матрицы A, причём $\mathrm{E}_0(\mathrm{A}) = 1$.

Как известно, для произвольной матрицы $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n$ определитель находится по формуле

$$\det \mathrm{A} \;=\; \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i=1}^{n} \mathrm{a}_{i\sigma(i)},$$

где σ пробегает множество всех $n!$ перестановок из n чисел $\{1,2,\ldots,n\}$ и $\operatorname{sgn}\sigma$ есть знак перестановки σ.