

Заметим, что:

$$Law(T_t) = Law\left(t^{\alpha/2} U(\alpha/2)\right) = Law\left(\left(\frac{a(\xi, \alpha/2)}{\eta}\right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\right) \quad (4)$$

Таким образом, из (2) и (4), обозначая $\gamma(0,2)$ гауссовскую случайную величину с нулевым средним и дисперсией, равной 2, получаем:

$$Law(Z_t - Z_s) = Law\left((t-s)^{1/\alpha} \left(\frac{a(\xi, \alpha/2)}{\eta}\right)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}} \gamma(0,2)\right).$$

Это представление для $Law(Z_t - Z_s)$ показывает, как с помощью моделирования трёх независимых случайных величин $\xi, \eta, \gamma = \gamma(0,2)$ можно смоделировать данные наблюдений за приращениями $Z_t - Z_s$ симметричного α -устойчивого случайного процесса.

В качестве оценивания качества моделей был использован метод моментов, а также проведено сравнение графиков аналитической и эмпирической функций распределения.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАТРАТЫ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДУФФИНГА И ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Н.Н. Стрилец, В.М. Мадорский

(БрГУ, г. Брест)

1. Уравнение Дуффинга имеет вид:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) + cx^p(t) = F(\sin wt, \cos wt),$$

где $F(\sin wt, \cos wt) = A \sin wt + B \cos wt + C(D \sin wt + E \cos wt)^p + G$,
 $w > 0$; $p \in \mathbb{N}$; a, b, c, A, B, C, D, G — числовые параметры.

2. Уравнение Ван-дер-Поля имеет вид:

$$\ddot{x}(t) - \varepsilon(1 - x^p(t))\dot{x}(t) + x^q(t) = F(\sin wt, \cos wt), \text{ где } \varepsilon > 0; p, q \in \mathbb{N}.$$

Часто приходится решать данные уравнения численно, производя дискретизацию и сведение их к системам нелинейных алгебраических уравнений, которые решаются одним из итерационных процессов [1]:

Шаг 1.

$$\left(\sigma\beta_{n-1}\|f(x_n)\|^2 E + f'^*(x_n)f'(x_n)\right)\Delta x_n = -f'^*(x_n)f(x_n), \quad 0 < \sigma \ll 1, \quad \beta_{-1} = 1. \quad (2)$$

Шаг 2.

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\nu_n}{\alpha\beta_n\|f(x_{n+1})\|}\right), \quad \alpha > 1, \quad \beta_0 \in (10^{-4}; 10^{-1}),$$

$$\nu_{n+1} = (1 - \beta_{n+1})\nu_n + \beta_n\beta_{n+1}^2\|f(x_{n+1})\|, \quad \nu_0 = \gamma\|f(x_0)\|, \quad 0 < \gamma \ll 1.$$

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n\Delta x_n, \quad x_0 - \text{начальный вектор.}$$

Шаг 3. Если $\|f(x_n)\| \leq \varepsilon$ и (или) $\|\Delta x_n\| \leq \varepsilon$ – конец просчётов, иначе – шаг 1.

Здесь $f'^*(x)$ – оператор, сопряжённый оператору $f'(x)$ – производной Фреше оператора $f(x)$.

Очевидно, что значительная часть вычислительных затрат связана с решением системы (2) на каждом шаге итерационного процесса.

Приближенные значения производных функции $x(t)$ в точке вычисляем по методу неопределенных коэффициентов (НК) [2]. Для аппроксимации используем нечетное число точек, а сами производные вычисляем в средней точке. Тогда матрица в левой части системы (2), имеет вид

$$S = \begin{bmatrix} A & U \\ V & W \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где A – диагональная матрица, в которой число диагоналей нечетно, и по обе стороны от главной находится одинаковое количество диагоналей:

Возможны 3 случая :

I. Если количество точек разбиения отрезка не превышает 128, то для определения вектора Δx_n можно воспользоваться методом квадратных корней.

II. Если же количество точек разбиения находится в пределах от 128 до 1024, то предыдущий вариант не является оптимальным. В этом случае воспользуемся описанным ниже приемом.

Пусть нужно решить систему n линейных уравнений вида $SX = F$, (4)

где

$$S = \begin{bmatrix} A_{n-s, n-s} & U_{n-s, s} \\ V_{s, n-s} & W_{s, s} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_{n-s, r} \\ X_{s, r} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_{n-s, r} \\ F_{s, r} \end{bmatrix}.$$

Индексы обозначают соответствующие размерности матриц. Матрица S имеет вид (3). Воспользовавшись для нахождения обратной матрицы формулой Фробениуса [3], аналогично как в [4] получим :

$$X = \begin{bmatrix} X_{n-s,r} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{n-s,s} (R_{s,s} (F_{s,r} - V_{s,n-s} X_{n-s,r})) \\ R_{s,s} (F_{s,r} - V_{s,n-s} X_{n-s,r}) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$(W_{s,s} + V_{s,n-s} Y_{n-s,s}) R_{s,s} = E_{s,s}, \quad (6)$$

$$A_{n-s,n-s} Y_{n-s,s} = -U_{n-s,s}, \quad A_{n-s,n-s} X_{n-s,r} = F_{n-s,r}, \quad (7)$$

где $E_{s,s}$ - единичная матрица размерности $[s \times s]$.

Совокупность действий (5)-(7) назовем методом *матричного окаймления*.

Таким образом, если известны решения систем (7) (в которых матрица

$A_{n-s,n-s}$ является диагональной), то в результате выполнения совокупности действий (5)-(6) получим решение исходной системы (4).

Пусть в общем случае каждая из систем (7) имеет вид $S_d X_d = F_d$, (8)

где S_d - диагональная матрица, удовлетворяющая указанным выше условиям.

Если q - количество диагоналей матрицы S_d и $k = \left[\frac{q}{2} \right]$, то выберем

ближайшее к n натуральное число n' ($n' \geq n$), которое делится на k без остатка. Дополним матрицу S_d до матрицы S'_d размерности $[n' \times n']$ добавлением нулевых строк и столбцов. Тогда матрицу S'_d можно разбить на блоки размерности $[k \times k]$. Зная решение системы $S'_d X'_d = F'_d$ (9)

$$S'_d = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \dots & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & B_m & C_m \end{bmatrix}, \quad X'_d = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_m \end{bmatrix}, \quad F'_d = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_m \end{bmatrix}.$$

легко найдем решение системы (8).

Можно показать, что как и в случае трехдиагональной прогонки для решения системы (9) необходимо выполнить совокупность двух действий (назовем их методом *трехдиагональной матричной прогонки*):

♦ Прямой ход:

$$(A_i u_{i-1} + B_i) u_i = -C_i, \quad (A_i v_{i-1} + B_i) v_i = F_i - A_i v_{i-1}, \quad i = \overline{1, m}, \quad u_0 = v_0 = 0$$

♦ Обратный ход: $x_i = u_i x_{i+1} + v_i$, $x_{m+1} = 0$.

III. Если количество точек разбиения превышает 1024, то предыдущий вариант становится неэффективным. В этом случае можно воспользоваться следующим соображением: как правило, производная не столь чувствительна к изменению аргумента как функция, то для аппроксимации якобиана $f'(x)$ производные функции $x(t)$ можно вычислять по методу НК, используя меньшее количество точек, чем при аппроксимации функции $f(x)$. На конечный результат такое допущение (и это подтверждается на практике) при большом количестве точек влияния практически не оказывает. Если для вычисления производной функции $x(t)$ при аппроксимации якобиана $f'(x)$ использовать 3 точки, то матрица A в (3) будет пятидиагональной. Тогда, зная решение систем (7), методом *матричного окаймления* получим решение системы (4). Каждую из систем (7) можно решить методом *пятидиагональной прогонки*.

Пусть дана пятидиагональная система вида

$$a_i x_{i-2} + b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} + e_i x_{i+2} = g_i, \quad i = \overline{1, l}$$

По аналогии с методом трехдиагональной прогонки можно показать, что для решения этой системы нужно выполнить совокупность двух действий:

– Прямой ход:

$$z_i = a_i(u_{i-2}u_{i-1} + v_{i-2}) + b_i u_{i-1} + c_i, \quad u_i = -\frac{a_i u_{i-2} v_{i-1} + b_i v_{i-1} + d_i}{z_i}, \quad v_i = -\frac{e_i}{z_i},$$

$$w_i = -\frac{a_i(u_{i-2}w_{i-1} + w_{i-2}) + b_i w_{i-1} - g_i}{z_i}, \quad u_{-2} = u_{-1} = v_{-2} = v_{-1} = w_{-2} = w_{-1} = 0.$$

– Обратный ход: $x_i = u_i x_{i+1} + v_i x_{i+2} + w_i$, $x_{n+1} = x_{n+2} = 0$.

Изложенные выше приемы позволяют значительно увеличить число точек разбиения без существенного изменения вычислительных затрат.

Литература.

1. Мадорский В.М. О регуляризованных итерационных методах с обратной связью для решения уравнений. //Труды института математики НАН Беларуси. 2000. Т.5. С. 89-91.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М., 1966. Т.1.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: «Наука», 1988.
4. Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М, 1950.