# О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ПРОЦЕССОВ

**Т. В. Соболева**

*(БГУ, г. Минск)*

В последние годы начал интенсивно расширяться круг практических задач, в которых стали естественным образом появляться устойчивые распределения. В некоторых областях техники, физики, астрономии, экономики и социологии появляются практические задачи использующие устойчивые распределения.

Представляет большой интерес рассмотрение методов и алгоритмов моделирования устойчивых процессов. Оперирование с распределениями устойчивых процессов сильно затруднено, поскольку явный вид устойчивых плотностей известен всего лишь в трёх случаях. Однако, в ряде случаев можно указать, как получать устойчивые процессы, например, из броуновского движения с помощью случайной замены времени.

В данной статье рассматривается алгоритм моделирования устойчивых случайных распределений и процессов предложенный в [1], [2].

<u>Определение 1.</u> Случайный процесс $Z_t$, $t \geq 0$ называется строго α - устойчивым процессом Леви, если:

$$Law(Z_{at}, t \geq 0) = Law\left(a^{1/\alpha} Z_t, t \geq 0\right)^1,$$

где $a \geq 0$.

Приведём один из примеров, который даёт возможность моделирования симметричных α - устойчивых распределений с помощью трёх независимых случайных величин: равномерно распределённой, гауссовской и экспоненциально распределённой.

Пусть $Z_t$, $t \geq 0$ – симметричный α - устойчивый процесс Леви с характеристической функцией

$$\varphi_t(\theta) = E\exp\{i\theta Z_t\} = \exp\left\{-t|\theta|^\alpha\right\},$$

где $0 < \alpha < 2$.

[1] Запись $Law(X) = Law(Y)$ означает совпадение распределений X и Y.

Из изложенного ниже будет следовать, что процесс $Z_t$, $t \geq 0$ может быть реализован в виде

$$Z_t = B_{T_t},\ t \geq 0, \tag{1}$$

где $B_t$, $t \geq 0$ – броуновское движение с $EB_t = 0$, $EB_t^2 = 2t$ и $T_t$, $t \geq 0$ – некоторый неотрицательный неубывающий α/2 - устойчивый случайный процесса. О процессе $Z_t$, $t \geq 0$, получаемом посредством преобразования (1), говорят, что он образован из броуновского движения с помощью случайной замены времени на $T_t$, $t \geq 0$.

Необходимый для представления (1) процесс $T_t$, $t \geq 0$ строится таким образом, что $Law(T_1) = Law(U^{(\alpha/2)})$, где $U^{(\alpha)}$ – неотрицательная устойчивая случайная величина с параметром $0 < \alpha < 1$. В силу определения 1, получим:

$$Law(T_t) = Law\left(t^{\alpha/2} U^{(\alpha/2)}\right) \tag{2}$$

Пусть $p(x,\alpha)$, $x \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ – плотность распределения вероятностей случайной величины $U = U^{(\alpha)}$, с индексом $0 < \alpha < 1$. Для этой плотности, сосредоточенной на $x \geq 0$, известно следующее представление:

$$p(x,\alpha) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_0^{\pi} a(z,\alpha) \exp\left\{-\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} a(z,\alpha)\right\} dz,$$

где

$$a(z,\alpha) = \left(\frac{\sin \alpha z}{\sin z}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\sin(1-\alpha)z}{\sin \alpha z}. \tag{3}$$

Плотность $p(x,\alpha)$ является плотностью распределения случайной величины

$$\zeta = \left(\frac{a(\xi,\alpha)}{\eta}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

где $a(z,\alpha)$ задаётся формулой (3), $\xi$, $\eta$ – независимые случайные величины, $\xi$ имеет равномерное распределение на $[0,\pi]$, а $\eta$ – экспоненциальное распределение с единичным параметром.

Заметим, что:

$$Law(T_t) = Law\left(t^{\alpha/2} U^{(\alpha/2)}\right) = Law\left(\left(\frac{a(\xi,\alpha/2)}{\eta}\right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\right) \qquad (4)$$

Таким образом, из (2) и (4), обозначая $\gamma(0,2)$ гауссовскую случайную величину с нулевым средним и дисперсией, равной 2, получаем:

$$Law\ (Z_t - Z_s) = Law\left((t-s)^{1/\alpha}\left(\frac{a(\xi,\alpha/2)}{\eta}\right)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\gamma(0,2)\right).$$

Это представление для $Law(Z_t - Z_s)$ показывает, как с помощью моделирования трёх независимых случайных величин $\xi$, $\eta$, $\gamma = \gamma(0,2)$ можно смоделировать данные наблюдений за приращениями $Z_t - Z_s$ симметричного α - устойчивого случайного процесса.

В качестве оценивания качества моделей был использован метод моментов, а также проведено сравнение графиков аналитической и эмпирической функций распределения.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАТРАТЫ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДУФФИНГА И ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

**Н.Н. Стрилец, В.М. Мадорский**

*(БрГУ, г. Брест)*

1. Уравнение Дуффинга имеет вид :

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) + cx^p(t) = F(\sin wt, \cos wt),$$

где $F(\sin wt, \cos wt) = A\sin wt + B\cos wt + C(D\sin wt + E\cos wt)^p + G$, $w > 0;\ p \in N;\ a,b,c,A,B,C,D,G$ – числовые параметры.

2. Уравнение Ван-дер-Поля имеет вид :

$$\ddot{x}(t) - \varepsilon(1 - x^p(t))\dot{x}(t) + x^q(t) = F(\sin wt, \cos wt),\ \text{где } \varepsilon > 0;\ p,q \in N.$$

Часто приходится решать данные уравнения численно, производя дискретизацию и сведение их к системам нелинейных алгебраических уравнений, которые решаются одним из итерационных процессов [1] :