Проведение достаточно громоздких промежуточных преобразований стало возможным благодаря использованию пакета Mathematica® 4.0.

Литература:

1. Чудов Л.А., Росляков Г.С., Кестенбойм Х.С. Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы. - М.: Наука, 1974.
2. Wolfram S. The Mathematica Book. - Electronic Version.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА

О.В. Матысик
(БрГУ, г. Брест)

Работа посвящена актуальной проблеме построения регуляризаторов при решении некорректных задач, поскольку такие задачи в большом количестве возникают в многочисленных приложениях современной математики. В работе строится регуляризатор для уравнения

$$Ax = y \tag{1}$$

в виде неявного итеративного метода

$$(E+\alpha A)x_{n+1} = (E-\alpha A)x_n + 2\alpha y,\quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь A - ограниченный положительный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, для которого нуль не является собственным значением, следовательно, задача некорректна. Предполагается, что при точной правой части y уравнения (1) существует точное решение x. В случае приближенной правой части y_δ, $\| y - y_\delta \| \le \delta$, метод (2) примет вид:

$$(E+\alpha A)x_{n+1,\delta} = (E-\alpha A)x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta,\, x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Доказана сходимость метода (3) при точной и приближенной правых частях уравнения (1) и в случае истокообразной представимости точного решения $x = A^s z,\quad s>0$ получены оценки погрешности, которые оптимизированы. Доказаны теоремы.

Теорема 1. Итерационный процесс (2) сходится при условии $\alpha > 0$.

Теорема 2. Итерационный процесс (3) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от δ так, чтобы $n(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теорема 3. Если выполняется условие $x = A^s z,\quad s>0$, то общая оценка погрешности метода (3) имеет вид

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta .$$

<u>*Теорема 4.*</u> Оптимальная оценка погрешности для метода (3) имеет вид

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{опт} \le (1+s)\|z\|^{\frac{1}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}} e^{-\frac{s}{s+1}}$$

и достигается при

$$n_{опт} = s(2\alpha)^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} .$$

Оптимальная оценка погрешности не зависит от α, но от α зависит $n_{опт}$ и, следовательно, объём вычислительной работы, поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α возможно большим из условия $\alpha > 0$ и так, чтобы $n_{опт}$ было целым. Вычислительный процесс необходимо остановить на $n_{опт}$ шаге. Приближение $x_{n,\delta}$, полученное на этом шаге, будет ближе всего к точному решению уравнения. Поскольку на α нет ограничения сверху (α >0), то за счет выбора α можно добиться того, что оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первых шагах итераций. В этом состоит преимущество неявного метода (3) перед явными методами итераций решения некорректных задач.

Доказана сходимость метода (2) в случае, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора *A*, т.е. в случае неединственного решения. Показано, что тогда метод (2) сходится к решению с минимальной нормой.

Если сведения об истокопредставимости решения отсутствуют, то метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям.

Определим момент останова итерационной процедуры условием

$$\left\|z_{n,\delta} - z_{n+1,\delta}\right\| > \varepsilon, \ (n < m), \ \left\|z_{m,\delta} - z_{m+1,\delta}\right\| \le \varepsilon,$$

где ε - заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова).

Доказана сходимость метода (3) с указанным правилом останова по соседним приближениям в случае, когда оператор A - несамосопряженный ограниченный положительный, получена оценка для момента останова. Число итераций, нужное для получения решения выбирается автоматически. При этом не требуется знание истокопредставимости точного решения.

Метод (3) также становится эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке

$$\left\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\right\|>\varepsilon,\ (n<m),\quad \left\|Ax_{m,\delta}-y_\delta\right\|\le\varepsilon, \tag{4}$$

где ε - заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова), $\varepsilon=b\delta,\quad b>1$.

Доказана сходимость метода (3) с правилом останова (4), получена оценка погрешности метода и оценка для момента останова. При решении уравнения (1) методом (3) с правилом останова (4) также не требуется знание истокопредставимости точного решения. И тем не менее будет автоматически выбрано число итераций m, обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4) обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ НАГРУЖЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.К. Млынчик

(БГТУ, Брест)

Линейное однородное нагруженное дифференциальное уравнение (ЛОНДУ) второго порядка имеет вид:

$$y''+p(x)y'+q(x)y+\alpha_1(x)y(a)+\alpha_2(x)y'(a)+\beta_1(x)y(b)+\beta_2(x)y'(b)=0, \tag{1}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ - заданные функции.

В отличие от линейного однородного дифференциального уравнения $y''+p(x)y'+y(x)y=0$, имеющего при «хороших» коэффициентах только два линейно независимых решения, уравнение (1) может иметь до шести линейно независимых решений.

Приведем схему построения ЛОНДУ типа (1) с различным количеством линейно независимых решений.

1). Пусть ЛОНДУ имеет только два линейно независимых решения y_1 и y_2; тогда оно может быть представлено в виде

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) & y_1 & y(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) & y_1' & y'(a) \\ y_1(b) & y_2(b) & y_2 & y(b) \\ y_1'(b) & y_2'(b) & y_2' & y'(b) \end{vmatrix} = 0$$