Применив описанную процедуру, можно построить множество X^0. Построив данные множества, можно сформулировать задачу оптимального управления для нахождения замыкаемой обратной связи. Оптимальные программное и позиционное гарантирующие управления с учетом замыкания являются решениями следующей экстремальной задачи

$$J(u) = \max_{w} c' x(t^*) \to \min_{u}$$

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + bu, x(t^0) = x_0, \\ &x(t^k) \in \underline{X}^k, k = \overline{1,2} \\ &|u(t)| \leq 1, t \in T. \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку решение ищется в классе дискретных функций, то для решения данной задачи применимы методы линейного программирования, что позволяет значительно упростить вычислительный процесс.

При исследовании данной задачи было отмечено, что при росте числа точек замыкания целевая функция уменьшается, однако при этом значительно возрастает размерность задачи линейного программирования. Кроме того, в ходе численных экспериментов было выяснено, что для построения хорошей аппроксимации замкнутой обратной связи достаточно небольшого числа точек замыкания, поскольку, начиная с некоторого числа, добавление еще одного замыкания незначительно улучшает критерий качества.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костина Е. А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления. I. Однократное замыкание // Автоматика и телемеханика, 1996. № 7. С. 121-130. II. Многократно замыкаемые обратные связи // Автоматика и телемеханика, 1996. № 8. С. 90-99.

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ О МГНОВЕННОМ ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ

А.В. Маковский

(БГУ, г. Минск)

1. Постановка задачи

Рассмотрим идеализированное представление о мгновенном точечном взрыве как о движении газа, которое вызвано мгновенным выделением конечной энергии в некоторой точке.

2. Математическая постановка

Примем точку, где произошло выделение энергии, за начало системы координат и будем считать движение газа симметричным. Внутри области, ограниченной ударной волной, движение будем предполагать непрерывным, так что должны иметь место дифференциальные уравнения газовой динамики. На ударной волне задаются условия Ренкина-Гюгонио. Ещё одно условие вводится исходя из закона сохранения энергии.

3. Система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вышеупомянутая система уравнений в частных производных может быть сведена к следующей системе (см., например, [1]):

$$R[\lambda]\left(\frac{(\nu-1)U'[\lambda]}{\lambda}+U[\lambda]\right)+\left(U[\lambda]-\frac{1+\gamma}{2}\lambda\right)R'[\lambda]==0, \tag{3.1}$$

$$-\frac{\nu}{4}(1+\gamma)R[\lambda]U[\lambda]+\frac{(-1+\gamma)}{2}P'[\lambda]+R[\lambda]\left(-\frac{(1+\gamma)}{2}\lambda+U[\lambda]\right)U'[\lambda]==0, \tag{3.2}$$

$$-\frac{\nu}{2}(1+\gamma)P[\lambda]+\left(-\frac{(1+\gamma)}{2}\lambda+U[\lambda]\right)P'[\lambda]+\gamma P[\lambda]\left(\frac{\nu-1}{\lambda}U[\lambda]+U'[\lambda]\right)==0, \tag{3.3}$$

$$\lambda=r/r_2;\ U(\lambda)=u(r)/u(r_2);\ P(\lambda)=p(r)/p(r_2);\ R(\lambda)=\rho(r)/\rho(r_2), \tag{3.4}$$

где r_2 - расстояние от центра до ударной волны, λ - относительная Эйлерова координата, ν - размерность задачи, а $U(\lambda)$, $P(\lambda)$, $R(\lambda)$ - относительные величины скорости, давления и плотности.

4. Первые интегралы и нахождение решения

Для системы (3.1-3.3) можно найти два первых интеграла [1], с использованием которых, можно получить из (3.1) однородное дифференциальное уравнение:

$$\partial_\lambda U[\lambda]=-\frac{U[\lambda]}{\lambda}\frac{(\nu-1)(\gamma-1)\gamma V[\lambda]^2/(\gamma+1)-\nu(2\gamma-1)V[\gamma]/2+\nu(\gamma+1)/4}{\gamma V[\lambda]^2-(\gamma+1)V[\lambda]+(\gamma+1)/2}, \tag{4.3}$$

где $V[\lambda]=U[\lambda]/\lambda$.

Осуществляя подстановку

$$U[\lambda]=\lambda\Phi[\lambda], \tag{4.4}$$

в равенство (4.3) и интегрируя полученное соотношение, получим:

$$\lambda[\Phi]=\Phi^{-2/(2+\nu)}C[\gamma,\nu,\Phi]^{A[\gamma,\nu]}\left(\frac{-1+\gamma(-1+2\Phi)}{-1+\gamma}\right)^{-(1-\gamma)/(-2+2\gamma+\nu)} \tag{4.5}$$

где $$A[\gamma,\nu]=\frac{4(-2+\nu)\nu+\gamma(-4+8\nu-3\nu^2)+\gamma^2(4+\nu^2)}{(-2+\gamma)(2+\nu)(2+(-1+\gamma)\nu)},$$

$$C[\gamma,\nu,\Phi]=\frac{-(1+\gamma)(2+\nu)+2(2+(-1+\gamma)\nu)\Phi}{2+\gamma(-2+\nu)-3\nu}$$

$U(\Phi)$ выражается из соотношения (4.4).

Выражения для $P(\Phi)$ и $R(\Phi)$ находятся, используя первые интегралы (4.1) - (4.2) и условие (4.4):

$$P[\Phi]=-(-1+\gamma)^{\gamma/(2-\gamma)}C[\gamma,\nu,\Phi]^{-A[\gamma,\nu]}\Phi^{2\nu/(2+\nu)}(-1-\gamma+2\Phi)^{\gamma/(-2+\gamma)},$$

$$R[\Phi]=(-1+\gamma)^{D[\gamma,\nu]}(2+\gamma(-2+\nu)-3\nu)^{B[\gamma,\nu]}(-1-\gamma+2\Phi)^{2/(-2+\gamma)}\times$$
$$\times(-(1+\gamma)(2+\nu)+2(2+(-1+\gamma)\nu)\Phi)^{-B[\gamma,\nu]},$$

$$A[\gamma,\nu]=\frac{4(-2+\nu)\nu+\gamma(-4+8\nu-3\nu^2)+\gamma^2(4+\nu^2)}{(-2+\gamma)(2+\nu)(2+(-1+\gamma)\nu)},$$

где $$B[\gamma,\nu]=\frac{4(-1+\gamma)\gamma+8(-1+\gamma)\nu+(4+(-3+\gamma)\gamma)\nu^2}{(-2+\gamma)(-2+2\gamma+\nu)(2+(-1+\gamma)\nu)},$$

$$D[\gamma,\nu]=\frac{(4-\gamma(4+\nu))}{(-2+\gamma)(-2+2\gamma+\nu)}.$$

5. Переход к новому параметру.

Использование полученного выше решения на практике сопряжено с некоторыми трудностями вычислительного характера. Во многом это связано с наличием множителя

$$\left(\frac{-1+\gamma(-1+2\Phi)}{-1+\gamma}\right)^{E[\gamma,\nu]}, \text{ где } \quad E[\gamma,\nu]=\frac{\gamma-1}{-2+2\gamma+\nu}$$

в выражениях для λ. Значение показателя в нём очень мало ($E(1.3, 3)=1/12$), что ведёт к необходимости использования вычислений с повышенной точностью.

График зависимости λ от Φ выглядит следующим образом (см. рис. 1)

Попытаемся получить найденные зависимости в более удобной для практического использования форме, перейдя к новому параметру ξ, исходя из условия:

$$\frac{1+\gamma-2\gamma\Phi}{1-\gamma}==\xi^{E[\gamma,\nu]^{-1}}$$

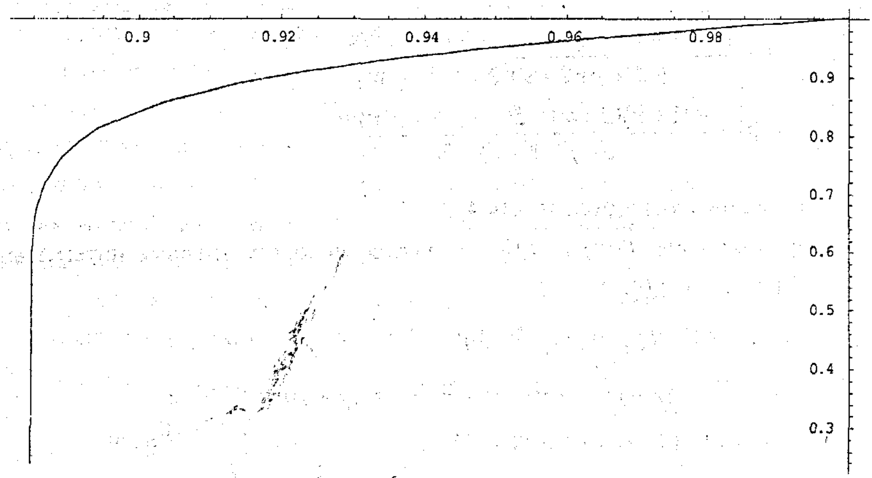

Рис. 1. График $\lambda(\Phi)$: при γ=1.3, ν=3

Выражения для λ, U, P и R запишутся следующим образом:

$$\lambda[\xi]=\xi K[\gamma,\nu,\xi]^{-2/(2+\nu)}L[\gamma,\nu,\xi]^{N[\gamma,\nu]},\quad U[\xi]=\xi K[\gamma,\nu,\xi]^{\nu/(2+\nu)}L[\gamma,\nu,\xi]^{N[\gamma,\nu]},$$

$$P[\xi]=K[\gamma,\nu,\xi]^{2\nu/(2+\nu)}M[\gamma,\nu,\xi]^{\gamma/(-2+\gamma)}L[\gamma,\nu,\xi]^\wedge$$
$$^\wedge\left(\frac{-4(-2+\nu)\nu+\gamma(-2+\nu)(-2+3\nu)-\gamma^2(4+\nu^2)}{(-2+\gamma)(2+\nu)(2+(-1+\gamma)\nu)}\right),$$

$$R[\xi]=\xi^{\nu/(-1+\gamma)}M[\gamma,\nu,\xi]^{2/(-2+\gamma)}L[\gamma,\nu,\xi]^\wedge$$
$$^\wedge\left(-\frac{4(-2+\nu)\nu+\gamma(-4+8\nu-3\nu^2)+\gamma^2(4+\nu^2)}{(-2+\gamma)(-2+2\gamma+\nu)(2+(-1+\gamma)\nu)}\right),$$

$$K[\gamma,\nu,\xi]=\frac{1+\gamma+(-1+\gamma)\xi^{2+\nu/(\gamma-1)}}{2\gamma}$$

$$L[\gamma,\nu,\xi]=\frac{-(1+\gamma)(-2+2\lambda+\nu)+(-1+\gamma)(2+(-1+\gamma)\nu)\xi^{2+\nu/(\gamma-1)}}{\gamma(2+\gamma(-2+\nu)-3\nu)},$$

$$M[\gamma,\nu,\xi]=\frac{1+\gamma-\xi^{2+\nu/(\gamma-1)}}{\gamma},\quad N[\gamma,\nu]=\frac{2}{2+\nu}+\frac{1-\gamma}{-2+2\gamma+\nu}+\frac{1+\gamma}{-2+\nu-\gamma\nu}.$$

Полученные результаты легко использовать на практике, поскольку зависимость Эйлеровой координаты λ от параметра ξ близка к линейной, что облегчает её численное обращение.

Проведение достаточно громоздких промежуточных преобразований стало возможным благодаря использованию пакета Mathematica® 4.0.

Литература:

1. Чудов Л.А., Росляков Г.С., Кестенбойм Х.С. Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы. - М.: Наука, 1974.
2. Wolfram S. The Mathematica Book. - Electronic Version.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА

О.В. Матысик

(БрГУ, г. Брест)

Работа посвящена актуальной проблеме построения регуляризаторов при решении некорректных задач, поскольку такие задачи в большом количестве возникают в многочисленных приложениях современной математики. В работе строится регуляризатор для уравнения

$$Ax = y \tag{1}$$

в виде неявного итеративного метода

$$(E+\alpha A)x_{n+1} = (E-\alpha A)x_n + 2\alpha y, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь A - ограниченный положительный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, для которого нуль не является собственным значением, следовательно, задача некорректна. Предполагается, что при точной правой части y уравнения (1) существует точное решение x. В случае приближенной правой части y_δ, $\| y - y_\delta \| \le \delta$, метод (2) примет вид:

$$(E+\alpha A)x_{n+1,\delta} = (E-\alpha A)x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta, \, x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Доказана сходимость метода (3) при точной и приближенной правых частях уравнения (1) и в случае истокообразной представимости точного решения $x = A^s z, \quad s > 0$ получены оценки погрешности, которые оптимизированы. Доказаны теоремы.

Теорема 1. Итерационный процесс (2) сходится при условии $\alpha > 0$.

Теорема 2. Итерационный процесс (3) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от δ так, чтобы $n(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теорема 3. Если выполняется условие $x = A^s z, \quad s > 0$, то общая оценка погрешности метода (3) имеет вид