Доклады Национальной академии наук Беларуси

2002 ноябрь—декабрь Том 46 № 6

УДК 517.911

Н. П. СЕМЕНЧУК, В. Т. ДАЦЫК

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

В [1] проведено исследование, найдены достаточные условия существования и единственности задачи Коши и получена оценка приближения решения для дифференциального уравнения нецелого порядка.

$$y^{(\alpha)} = f(x, y), \tag{1}$$

где $0 < \alpha < 1$, а функция f — удовлетворяет определенным условиям. Мы же в своей работе обобщаем результаты указанных исследований.

Рассмотрим нелинейное (в общем случае) дифференциальное уравнение с дробной старшей производной

$$y^{(\alpha)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{2}$$

где $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть функция f — абсолютно интегрируема на параллелепипеде

$$\Pi_{lhj} := \left\{ (x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^{n+1} \left| \begin{array}{ll} 0 \le x \le l, & l \in \mathbb{R}_+, \\ y_0^{(j)} - h_j \le y^{(j)} \le y_0^{(j)} + h_j, & y_0^{(j)} \in \mathbb{R}, \\ h_j \in \mathbb{R}_+, & j = \overline{0, n-1} \end{array} \right. \right\}.$$

Решение уравнения (2) будем искать в классе дифференцируемых до порядка $(n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$, функций $y = y(x)$ на отрезке $[0, l]$ с абсолютно непрерывной на этом отрезке производной $y^{(n-1)}(x)$. Причем, для любых указанных функций $y = y(x)$ функция $\mu(x) := f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$ должна быть также абсолютно непрерывной на отрезке $[0, l]$ (условие (*)). Норма для функций $y = y(x)$ вводится по формуле

$$\| y(x) \| = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^l | y^{(j)}(x) | \, dx. \tag{3}$$

Указанный класс функций $y = y(x)$ обозначим через $L^{(j)}(0, l)$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 1. *Если для уравнения* (2) *функция f — абсолютно интегрируема на параллелепипеде Π_{lhj} и для любых точек $M_1(x, y_1, y'_1, ..., y_1^{(n-1)})$ и $M_2(x, y_2, y'_2, ..., y_2^{(n-1)})$ из Π_{lhj} будет*

$$|f(M_1) - f(M_2)| \le A \sum_{j=0}^{n-1} | y_1^{(j)} - y_2^{(j)} |, \tag{4}$$

где A — некоторая положительная константа, а также выполняется условие (*), *то уравнение* (2) *при выполнении неравенства*

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{l^\alpha}{\alpha} + \sum_{j=1}^{n-l} (\alpha - 1)(\alpha - 2)\ldots(\alpha - (j-1)) l^{\alpha - j} \right) < 1 \tag{5}$$

имеет в классе $L^{(j)}(0, l)$ единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathcal{D}^{-(1-\alpha)} y(0) = y_0^{(n-1)} = \mathcal{D}^{-(2-\alpha)} y(0) = y_0^{(n-2)} = \ldots = \mathcal{D}^{-(n-\alpha)} y(0) = y_0 = 0, \tag{6}$$

где Γ — гамма-функция, $\mathcal{D}^{-\beta}$ — дробный интеграл порядка $\beta > 0$, $\mathcal{D}^{\beta}$ — дробная производная порядка $\beta > 0$.

Доказательство. Вначале показывается, что уравнение (2) с начальными условиями (6) равносильно нелинейному интегральному уравнению типа Абеля—Гаммерштейна

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))dt. \tag{7}$$

Дальше для доказательства существования и единственности решения интегрального уравнения (7) применим принцип сжимающих отображений. Представим (7) в операторном виде

$$\psi = B\varphi. \tag{8}$$

Доказывается, что оператор B отображает элементы класса $L^{(l)}(0, l)$ в этот же класс. Пусть функция $\varphi(x) \in L^{(l)}(0, l)$, тогда

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\right) dt \right\|_{L(0,l)} \le \tag{9}$$
$$\frac{l^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left\| f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\right) \right\|_{L(0,l)} < +\infty,$$

т. е. $\psi(x) \in L(0, l)$.

Применяя теорему о дифференцировании собственных интегралов, зависящих от параметра с переменными пределами интегрирования, получим:

$$\psi^{(k)}(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-(k+1)} f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))dt, \tag{10}$$

т. е. доказано существование всех производных функции $\psi(x)$ до порядка $(n-1)$ включительно $(k = \overline{1, n-1})$.

Дальше доказывается, что функция $\psi^{(n-1)}(x)$ есть абсолютно непрерывная функция на отрезке $[0, l]$. Справедливо представление

$$f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) = f(0, \varphi(0), \varphi'(0), \ldots, \varphi^{(n-1)}(0)) + \int_0^t f'(s, \varphi(s), \varphi'(s), \ldots, \varphi^{(n-1)}(s))ds.$$

Тогда

$$\varphi^{(n-1)}(x) = M \int_0^x t^{\alpha-n} dt + K \int_0^x (x-t)^{\alpha-n} dt \int_0^t f'(s, \varphi(s), \varphi'(s), \ldots, \varphi^{(n-1)}(s))ds, \tag{11}$$

где M и K — константы.

Первое слагаемое правой части (11) есть абсолютно непрерывная функция на отрезке $[0, l]$ [4, с. 344].

Для доказательства абсолютной непрерывности второго слагаемого дополнительно воспользуемся тем, что если $f(t)$ — абсолютно непрерывная функция в своей области определения и $0 < \gamma < 1$, то $\int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\gamma}} ds$ — суммируемая функция в этой области [5, с. 40].

Утверждение об абсолютной непрерывности функции $\psi^{(n-1)}(x)$ — доказано.

И, наконец, доказывается, что оператор B есть сжимающее отображение. Берем любые элементы $\varphi_1, \varphi_2 \in L^{(l)}(0, l)$. Будем иметь:

$$\rho(B\varphi_1, B\varphi_2) = \| B\varphi_1 - B\varphi_2 \|_{L^{(l)}(0, l)} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^l \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (f(t, \varphi_1(t), \varphi'_1(t), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(t)) - \right.$$

$$\left. f(t, \varphi_2(t), \varphi'_2(t), \ldots, \varphi_2^{(n-1)}(t))) dt \right| dx + \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^l \left| \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j)}{\Gamma(\alpha)} \times \right.$$

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1-j}\left(f(t,\varphi_1(t),\varphi_1'(t),\ldots,\varphi_1^{(n-1)}(t))-f(t,\varphi_2(t),\varphi_2'(t),\ldots,\varphi_2^{(n-1)}(t))\right)dt\,|\,dx\le$$

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{l^\alpha}{\alpha}\int_0^l\sum_{i=1}^{n-1}|\varphi_1^{(i)}(t)-\varphi_2^{(i)}(t)|+\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))\,l^{\alpha-j}\right)\int_0^l\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi_1^{(i)}(t)-\varphi_2^{(i)}(t)|\,dt=$$

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{l^\alpha}{\alpha}+\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))l^{\alpha-j}\right)\rho(\varphi_1,\varphi_2).$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то справедлива оценка*

$$\|y(x)-y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,l)}\le\frac{B\|y(x)-\mathcal{U}_\lambda(y;x)\|_{L^{(j)}(0,l)}}{1-Al\varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda,\ae^{\omega L^{(j)}}_{\mathcal{K}_\alpha}\right)},\tag{12}$$

где $\mathcal{U}_\lambda$ *— линейный регулярный класс методов суммирования интегралов;*

$$\varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda,\ae^{\omega L^{(j)}}_{\mathcal{K}_\alpha}\right)=\sup_{\varphi\in\ae^{\omega L^{(j)}}_{\mathcal{K}_\alpha}}\|\varphi(x)-\mathcal{U}_\lambda(\varphi(\xi);x)\|_{L^{(j)}(0,l)},\quad\lim_{\lambda\to\infty}\varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda,\ae^{\omega L^{(j)}}_{\mathcal{K}_\alpha}\right)=0,\tag{13}$$

$\ae^{\omega_L(j)}_{\mathcal{K}_\alpha}$ *— класс всех измеримых функций* $\varphi\in L^{(j)}(0,l)$ *и таких, что для любых* $x', x''\in[o,l]$ *будет*

$$\|\varphi(x')-\varphi(x')\|_{L^{(j)}(0,l)}\le\omega_L(\mathcal{K}_\alpha;|x''-x'|),\tag{14}$$

$$\omega_L(\mathcal{K}_\alpha;|x''-x'|)=\frac{1}{l}\sup_{\substack{0\le\sigma\le|x''-x'|\\0\le x\le l-\sigma\\0<|x''-x'|<l}}\int_0^l|\mathcal{K}_\alpha(x+\sigma,t)-\mathcal{K}_\alpha(x,t)|\,dt\tag{15}$$

— усредненный модуль непрерывности функции,

$$\mathcal{K}_\alpha(x,t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}(x-t)^{\alpha-1}, & t\le x,\\0, & t>x,\end{cases}\quad x\in(0,l),$$

$y_\lambda(x)$ *— решение специально построенного для* (7) *с помощью класса линейных методов суммирования операторного уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим так называемое операторное уравнение типа Абеля—Гаммерштейна

$$y_\lambda(x)=\int_0^l\mathcal{U}_\lambda(\mathcal{K}_\alpha(\xi,t);x)\,f(t,y_\lambda(t),y'_\lambda(t),\ldots,y_\lambda^{(n-1)}(t))\,dt,\tag{16}$$

где

$$\mathcal{U}_\lambda(\mathcal{K}_\alpha(\xi,t);x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda\sum_{m=0}^\infty a_m(\lambda)\left(\frac{u}{\lambda}\right)^m du\int_0^l\mathcal{K}_\alpha(\xi,t)\cos u(x-\xi)\,d\xi,\tag{17}$$

$$\mathcal{K}_\alpha(x,t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}(x-t)^{\alpha-1}, & t\le x,\\0, & t>x,\end{cases}\quad 1<x<l.\tag{18}$$

Абсолютно сходящиеся функциональные ряды по степеням $\frac{u}{\lambda}$, $0\le u\le\lambda>0$, (конечные суммы) $\sum_{m=0}^\infty a_m(\lambda)\left(\frac{u}{\lambda}\right)^m$, где коэффициенты $a_m(\lambda)$ такие, что при любых $\lambda>0$ ряды

$|a_0(\lambda)| + \sum_{m=0}^{\infty} m|a_m(\lambda)|$ — сходятся, определяют класс линейных методов суммирования интегралов, в частности — интегралов Фурье.

Сюда входят многие известные классические методы суммирования ($(C, 1)$ — средние, средние Зигмунда, метод суммирования Бернштейна—Рогозинского, средние Рисса и др.). Например, если $a_0(\lambda) = 1$, $a_1(\lambda) = -1$ и все другие коэффициенты $a_m(\lambda) = 0$, то имеем так называемые $(C, 1)$ — средние, определяемые множителями суммирования — $\left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)$.

Уравнение (16) имеет в классе $L^{(j)}(0, l)$ единственное решение $y_\lambda(x)$. Оценим $\| y(x) - y_\lambda(x) \|_{L^{(j)}(0, l)}$, где $y(x)$ — решение уравнения (7). Будет справедливо равенство

$$y(x) - y_\lambda(x) = y(x) - \mathscr{U}_\lambda(y, x) + \mathscr{U}_\lambda(\beta_\lambda(\xi); x) - \beta_\lambda(x) + \beta_\lambda(x), \tag{19}$$

где

$$\beta_\lambda(x) = \int_0^l \mathscr{K}_\alpha(x, t)\,(f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) - f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \ldots, y_\lambda^{(n-1)}(t)))dt \tag{20}$$

Дальше доказывается, что

$$\lim_{s \to +0} \omega_L(\mathscr{K}_\alpha; s) = 0. \tag{21}$$

Для этого непосредственно вычисляем

$$\int_0^l |\mathscr{K}_\alpha(x + \sigma, t) - \mathscr{K}_\alpha(x, t)|\,dt. \tag{22}$$

Получим, что

$$\omega_L(\mathscr{K}_\alpha; s) = \max\left\{s^\alpha, l^\alpha - (l - s)^\alpha\right\} \frac{1}{l\Gamma(\alpha + 1)}. \tag{23}$$

Из (23) следует справедливость (21).

Также оценивается модуль непрерывности

$$\omega(\beta_\lambda; s) = \sup_{\substack{0 \le \sigma \le s \\ 0 \le x \le l - \sigma \\ 0 < s < 1}} \int_0^{l-\sigma} |\beta_\lambda(x + \sigma) - \beta_\lambda(x)|\,dx. \tag{24}$$

Получим, что

$$\omega(\beta_\lambda; s) \le \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^l \sum_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(t) - y_\lambda^{(j)}(t)| \max\left\{l^\alpha - (l - s)^\alpha, s^\alpha\right\} = Al \| y(t) - y_\lambda(t) \|_{L^{(j)}(0, l)} \omega_L(\mathscr{K}_\alpha; s). \tag{25}$$

Из неравенства (25) следует, что

$$\frac{\omega(\beta_\lambda; s)}{Al \| y(t) - y_\lambda(t) \|_{L^{(j)}(0,l)}} \le \omega_L(\mathscr{K}_\alpha; s). \tag{26}$$

Учитывая равенство (13) и оценки (15), (25), (26), будем иметь:

$$\| \beta_\lambda(x) - U_\lambda(\beta_\lambda(\xi); x) \|_{L^{(j)}(0, l)} \le A\,l\, \| y(t) - y_\lambda(t) \|_{L^{(j)}(0, l)}\ \varepsilon\left(\mathscr{U}_\lambda, æ_{\mathscr{K}_\alpha}^{\omega_L(j)}\right). \tag{27}$$

Дальше оценивается $\|\beta_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0, l)}$.

Получим:

$$\| \beta_\lambda(x) \|_{L^{(j)}(0, l)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^l \left| \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} (f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) - \right.$$

$$\left. f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \ldots, y_\lambda^{(n-1)}(t)))\,dt \right| dx + \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^l \left| \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)\ldots(\alpha - j)}{\Gamma(\alpha)} \times \right.$$

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1-j}\left(f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) - f(t, y_\lambda(t), y'_\lambda(t), \ldots, y_\lambda^{(n-1)}(t))\right) dt \,|\, dx \le \quad (28)$$

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{l^\alpha}{\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))l^{\alpha-j}\right) \| y(x) - y_\lambda(x) \|_{L^{(j)}(0,\, l)}$$

Из равенства (19) с учетом оценок (27) и (28) будем иметь:

$$\| y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,\, l)} \le \| y(x) - \mathcal{U}_\lambda(y; x)\|_{L^{(j)}(0,\, l)} + A\, l\, \| y(x) - y_\lambda(x) \|_{L^{(j)}(0,\, l)}\, \varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda, æ^{\omega_{L^{(j)}}}_{\mathcal{K}_\alpha}\right) + \tag{29}$$

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{l^\alpha}{\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))l^{\alpha-j}\right) \| y(x) - y_\lambda(x) \|_{L^{(j)}(0,\, l)}.$$

Из (29) получим:

$$\| y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,\, l)} \le C_\lambda + M \| y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,\, l)} \le \tag{30}$$

$$C_\lambda + M\,(C_\lambda + M\,(C_\lambda + \ldots)\ldots) = C_\lambda(1 + M + M^2 + M^3 + \ldots) = C_\lambda B,$$

где

$$C_\lambda = \| y(x) - \mathcal{U}_\lambda(y; x)\|_{L^{(j)}(0,\, l)} + A\, l\, \| y(x) - y_\lambda(x) \|_{L^{(j)}(0,\, l)}\, \varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda, æ^{\omega_{L^{(j)}}}_{\mathrm{K}_\alpha}\right), \tag{31}$$

$$M = \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{l^\alpha}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))l^{\alpha-j}\right), \tag{32}$$

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} M^k. \tag{33}$$

В правую часть (30) подставляем C_λ из (31), получим:

$$\| y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,\, l)} \le B\, \| y(x) - \mathcal{U}_\lambda(y; x)\|_{L^{(j)}(0,\, l)} + \tag{34}$$

$$A\, l\, \| y(x) - y_\lambda(x) \|_{L^{(j)}(0,\, l)}\, \varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda, æ^{\omega_{L^{(j)}}}_{\mathcal{K}_\alpha}\right).$$

Решаем неравенство (34) относительно $\| y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,\, l)}$

$$\|y(x) - y_\lambda(x)\|_{L^{(j)}(0,\, l)} \le \frac{B\|y(x) - \mathcal{U}_\lambda(y; x)\|_{L^{(j)}(0,\, l)}}{1 - Al\varepsilon\left(\mathcal{U}_\lambda, æ^{\omega_{L^{(j)}}}_{\mathcal{K}_\alpha}\right)}. \tag{35}$$

Теорема 2 доказана.

Summary

Cauchy problem for ordinary differential equation of fraction order is studied. Conditions existence of a unique solution of this problem are given in a special space of differentiable functions. The estimation of approximation of the solution by solutions of Abel-Gummerstein operator equations, constructed using methods of summation of Fourier integrals, is established.

Литература

1. Семенчук Н. П. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 10. С. 1831—1833.
2. Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. // Известия АН Армянской ССР. 1968. 3, № 1. С. 3—29.
3. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1974.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.
5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

Поступило 03.06.2002