Теорема. *Пусть f^{ij} $i=\overline{1,p}, j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию линейного роста и ограничены, L^j- функции ограниченной вариации и непрерывны ($j=\overline{1,q}$). Тогда при $n\to\infty$, $h_n\to 0$ решение $x_n(t)$ задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (3) в пространстве $L^1(T)$, если $\int_T |x_{n0}(\tau_t)-x_0|\,dt\to 0$.*

Аналогичные теоремы с другими условиями для функций f^{ij} $i=\overline{1,p}, j=\overline{1,q}$ были рассмотрены в работах [1,2].

Литература

1. Жук А.И., Яблонский О.Л., Спасков С.А. *Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай* // Весцi БДПУ. Сер. 3, Фiзiка, матэматыка, iнфарматыка, бiялогiя, геаграфiя. 2019. № 4. С. 16–22.

2. Жук А.И., Хмызов А.К. *Системы квазидифференциальных уравнений в прямом произведении алгебр мнемофункций. Симметрический случай* // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2010. № 2. С. 87–93.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИМИ ОСОБЕННОСТЬ

Е.В. Кузьмина[1]

[1]Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

бульвар Космонавтов 21, 224016 Брест, Беларусь elena_kuzmina@inbox.ru

Рассмотрим задачу о существовании обобщенных решений линейных дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}$ вида

$$U'-QU=0 \tag{1}$$

с обобщенным коэффициентом Q, совпадающим с такой заданной мероморфной функцией q на дополнении к множеству полюсов этой функции, при которой уравнение на комплексной плоскости, соответствующее (1), имеет мероморфное решение. Частный случай такой задачи рассмотрен в [1]. Для (1) не определено понятие решения, так как при подстановке в (1) обобщенной функции U возникает произведение обобщенных функций.

Воспользуемся общим подходом к введению понятия решения, при котором вместо обобщенных коэффициентов Q рассматривают $q_\varepsilon(x)$ – их аппроксимации семействами гладких функций, зависящими от малого параметра ε. Если в пространстве распределений существует при $\varepsilon\to 0$ предел решений $u_\varepsilon(x)$ соответствующих аппроксимирующих уравнений, то он называется *обобщенным решением* исходного уравнения при заданном способе аппроксимации коэффициентов.

На конечном интервале $(-N;\ N)$ функция q представляется в виде

$$q(x)=\sum_{|a_k|<N}\frac{s_k}{x-a_k}+b_N(x),$$

где $b_N(z)$ – гладкая на $(-N;\ N)$ функция, s_k – целые числа. Функции q соответствует семейство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(-N,N)$ вида

$$Q_N=\sum_{|a_k|<N}s_k\left[P\left(\frac{1}{x-a_k}\right)+M_k\delta_{a_k}\right]+b_N(x), \tag{2}$$

где M_k — произвольные комплексные числа. При заданных M_k обобщенная функция Q определена на всем пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})=\cup_N\mathcal{D}(-N,N)$. Пусть $\lambda_k=\frac{1}{2}+\frac{M_k i}{2\pi}$. На интервале $(-N;\ N)$ аппроксимирующее семейство для функции (2) может быть записано в виде

$$q_{\varepsilon_N}(x)=\sum_{|a_k|<N}\frac{\lambda_k s_k}{x+i\varepsilon-a_k}+\sum_{|a_k|<N}\frac{(1-\lambda_k)s_k}{x-i\varepsilon-a_k}+b_N(x). \tag{3}$$

Теорема. *При аппроксимации* (3) *коэффициента* (2) *уравнение* (1) *имеет обобщенные решения только в том случае, если при* $s_k < 0$ *число* $M_k = i\pi\left(1 - \frac{2m_k}{s_k}\right)$, *где* m_k *– целое, такое, что* $m_k \leq s_k$ *или* $m_k \geq 0$.

Если в уравнении (1) коэффициент Q имеет особенность только в точке 0, то обобщением такого уравнения являются системы вида

$$U' - B\frac{1}{x}U = 0, \tag{4}$$

где B – заданная постоянная матрица. Если собственные значения матрицы B целые и простые, то матрица B приводится к диагональному виду и система (4) распадается на скалярные уравнения, которые уже исследованы [1].

Литература

1. Антоневич А. Б., Кузьмина Е. В. *Решения дифференциального уравнения* $u' + \frac{s}{x}u = 0$ *в пространстве распределений* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 56–66.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

М.Х. Мазель[1], О.И.Пиндрик[2]

[1]Белорусский Государственный Университет mayamazel@gmail.com
[2]Белорусский Государственный Университет olgapindrik@gmail.com

Как известно, одним из важнейших свойств линейного ограниченного оператора является теорема о непустоте его спектра в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, а также теорема об открытости резольвентного множества такого оператора. Аналогичные результаты справедливы и для обобщенных операторов, однако, уже на множестве обобщенных комплексных чисел $\mathbb{C}_*$.

Обобщенное комплексное число $\widetilde{\lambda}$ называют регулярной точкой обобщенного оператора $\widetilde{A}$, если оператор $\widetilde{\lambda}\widetilde{I}$-$\widetilde{A}$ обратим в алгебре обобщенных операторов. Множество регулярных точек называют резольвентным множеством оператора $\widetilde{A}$. Обобщенное число $\widetilde{\lambda}$, не являющееся регулярным, называют спектральным значением обобщенного оператора $\widetilde{A}$. Множество всех спектральных точек обобщенного оператора $\widetilde{A}$ называют его обобщенным спектром и обозначают $\sigma(\widetilde{A})$.

Теорема 1. Обобщенный спектр произвольного обобщенного оператора $\widetilde{A}$ является непустым подмножеством множества обобщенных комплексных чисел $\mathbb{C}_*$.

Замечание. В поле $\mathbb{C}$ обобщенный спектр обобщенного оператора $\widetilde{A}$ может быть пустым множеством.

Пример. Пусть $\widetilde{A} = [(nI)]$. Тогда в обобщенный спектр оператора $\widetilde{A}$ входят только такие числа, представители которых являются последовательностями, содержащими подпоследовательности вида (n_k). Но обобщенное число, заданное такими представителями, не является классическим комплексным числом из поля $\mathbb{C}$. Таким образом, построен пример обобщенного оператора, у которого обобщенный спектр состоит только из чисел, не лежащих в поле $\mathbb{C}$, то есть нет ни одного классического комплексного числа λ в спектре этого обобщенного оператора $\widetilde{A}$.

Теорема 2. Резольвентное множество обобщенного оператора $\widetilde{A}$ открыто.

Литература