перпендикулярной к стержню, равен сумме момента инерции стержня относительно вращения вокруг центра тяжести и момента инерции массы, равной массе стержня, находящейся на расстоянии от оси, равном расстоянию центра тяжести стержня от оси.

Наглядно можно представить себе стержень, закрепленный в центре тяжести на шарнире. Тогда вращение оси может не сопровождаться вращением самого стержня, возможно движение, последовательные стадии которого показаны на рисунке 2.

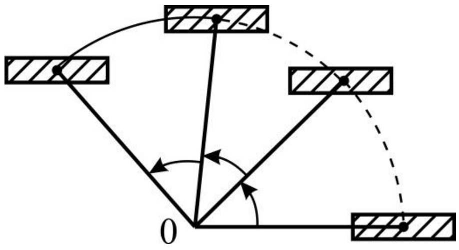

Рисунок 2

Кинетическая энергия такого движения равна $E' = (1/2)mv_{C_1}^2$, где v_{C_1} – скорость центра тяжести стержня. Но $v_{C_1} = \omega l$, так что $E' = \dfrac{\omega^2}{2} ml^2$.

Движение, которое мы рассматривали раньше (рисунок 1), отличается от рисунка 2 тем, что там сам стержень также вращается с угловой скоростью ω вокруг своего центра тяжести. Поэтому кинетическая энергия вращения рисунок 1 оказывается равной сумме энергии вращения по типу рисунок 2 и энергии вращения вокруг центра тяжести, равной $I_0 \dfrac{w^2}{2}$.

Из вывода формулы видно, что такое простое сложение энергий при сложении двух движений получается только тогда, когда рассматривается движение центра тяжести; только в этом случае получается равенство нулю интеграла $\int\limits_{a_0}^{b_0} x\rho_0(x)dx = 0$.

УДК 517.95

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Т. А. Яцук

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: А. И. Басик, канд. физ.-мат. наук, доцент

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ – неограниченная область, границей которой является гладкая поверхность $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ (x \in \Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases} \tag{1}$$

Отметим, что в случае неограниченной области Ω решение задачи (1) ищется в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, имеющих на бесконечности порядок $O(|x|^{-1})$, где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ [1, с. 352]. Одним из методов построения решения задачи Дирихле является метод функций Грина.

Определение 1. [2, с. 82-83] *Функцией Грина задачи Дирихле называется функция* $G(x;y) = E(x;y) + g(x;y)$, *где* $E(x;y) = -\dfrac{1}{4\pi|x-y|}$ *– фундаментальное решение оператора Лапласа, а функция* g *удовлетворяет условиям*

1. $\forall y \in \Omega \quad \left(g(\cdot;y) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \wedge \Delta_x g = 0\right)$;
2. $\forall y \in \Omega \quad \left(g|_{\partial\Omega} = -E(x;y), x \in \partial\Omega\right)$;
3. $g(x;y) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

В курсах «Уравнения математической физики» и «Уравнения с частными производными» доказывается [2, с. 82-83], что если существует функция Грина $G(x;y)$ задачи Дирихле (1) и эта задача имеет решение $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, то в каждой точке $y \in \Omega$ выполняется равенство

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \frac{\partial G(x;y)}{\partial_x \nu} dS(x), \tag{2}$$

где ν – единичное поле внешних нормалей на поверхности $\partial\Omega$. На практике по известной функции Грина вычисляют функцию $u(y)$ по формуле (2) и выясняют, задает ли она решение задачи (1).

В настоящей статье рассмотрим полупространство

$\Omega = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 > 0\right\}$.

Известно [1, с. 362], что в этом случае функция Грина имеет вид

$$G(x;y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{1}{4\pi|x-z|}, \tag{3}$$

где $z = (y_1, y_2, -y_3)$ – точка симметричная точке y относительно плоскости $x_3 = 0$, при этом формула (2) примет вид

$$u(y) = \frac{y_3}{2\pi} \iint_{\mathrm{R}^2} \frac{\varphi(x_1;x_2)dx_1dx_2}{(\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + y_3^2})^3}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *непрерывная ограниченная функция, тогда функция* $u(y)$, *заданная формулой* (4), *удовлетворяет в полупространстве* $y_3 > 0$ *уравнению Лапласа и* $u|_{y_3=0} = \varphi$.

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\frac{y_3}{2\pi}\iint_{\mathrm{R}^2}\frac{dx_1dx_2}{(\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+y_3^2})^3}=1$$
.

Из неравенства

$$|u(y_1;y_2;y_3)|=\left|\frac{y_3}{2\pi}\iint_{\mathrm{R}^2}\frac{\varphi(x_1;x_2)dx_1dx_2}{(\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+y_3^2})^3}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\iint_{\mathrm{R}^2}\frac{\varphi(y_3z_1+y_1;y_3z_2+y_2)}{\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2+1}\right)^3}dz_1dz_2\right|\le\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathrm{R}^2}\frac{|\varphi(y_3z_1+y_1;y_3z_2+y_2)|}{\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2+1}\right)^3}dz_1dz_2\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathrm{R}^2}\frac{M}{\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2+1}\right)^3}dz_1dz_2=M,$$

следует, что интеграл (4) сходится равномерно на каждом компактом множестве, лежащем в Ω, и, следовательно, представляет собой непрерывную ограниченную функцию в области Ω.

Докажем, что $\lim\limits_{y_3\to 0}u(y_1;y_2;y_3)=\varphi(y_1;y_2)$. Имеем

$$|u(y_1;y_2;y_3)-\varphi(y_1;y_2)|\le\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathrm{R}^2}\frac{|\varphi(y_3z_1+y_1;y_3z_2+y_2)-\varphi(y_1;y_2)|}{\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2+1}\right)^3}dz_1dz_2$$
.

При каждом $y_3>0$ подынтегральная функция непрерывна по совокупности переменных z_1, z_2 на плоскости,

$$\lim_{y_3\to+0}\left(\frac{|\varphi(y_3z_1+y_1;y_3z_2+y_2)-\varphi(y_1;y_2)|}{\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2+1}\right)^3}\right)=0$$

и справедлива оценка

$$\frac{|\varphi(y_3z_1+y_1;y_3z_2+y_2)-\varphi(y_1;y_2)|}{\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2+1}\right)^3}\le\frac{2M}{\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2+1}\right)^3}.$$

Согласно теореме Лебега о мажорантной сходимости [3, с. 70],

$$\lim_{y_3\to+0}\iint_{\mathrm{R}^2}\frac{|\varphi(y_3z_1+y_1;y_3z_2+y_2)-\varphi(y_1;y_2)|}{\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2+1}\right)^3}dz_1dz_2=0$$
,

т. е. $u|_{y_3=0}=\varphi$.

Дифференцированием под знаком интеграла, нетрудно убедиться в том, что $u(y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области Ω. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 2 следует, что функция (4) удовлетворяет уравнению Лапласа и в случае, если $\varphi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ является ограниченной и кусочно-непрерывной, причем, граничное условие выполняется во всех точках непрерывности функции φ. Проиллюстрируем сказанное на примере функции

$$\varphi(x_1;x_2)=\begin{cases}-1, & \text{если } x_1<0,\\ 1, & \text{если } x_1>0.\end{cases}$$

Проведя вычисления по формуле (4), получим, что

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} arctg\, \frac{x_1}{x_3}.$$

Непосредственная проверка показывает, что $\Delta u \equiv 0$ в полупространстве $x_3 > 0$ и

$$\lim_{x_3 \to +0} u(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{x_3 \to +0} arctg\, \frac{x_1}{x_3} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 > 0, \\ 0, & \text{если } x_1 = 0, \\ -1, & \text{если } x_1 < 0. \end{cases}$$

Отметим, что построенная функция $u(x)$ не является бесконечно малой при $|x| \to +\infty$ и, следовательно, найденное решение не является классическим.

Список литературы

1. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики : учеб. пособие / В. И. Корзюк. – Минск : БГУ, 2011. – 459 с.
2. Олейник, О. А. Лекции об уравнениях с частными производными / О. А. Олейник. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 206 с.
3. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с.