притягивается к Земле с силой $F=\chi\frac{mM}{r^2}$, где m – масса тела, M – масса Земли. С другой стороны, по второму закону Ньютона $F=ma$, где a – ускорение силы тяжести на расстоянии r от центра Земли. Сравнивая два выражения для F, находим $a=\frac{\chi M}{r^2}$. Если $r=r_0$, то $a=g$, поэтому $g=\frac{\chi M}{r_0^2}$, откуда $\chi=\frac{gr_0^2}{M}$.

Окончательно получаем $a=g\frac{r_0^2}{r^2}$. В этом случае равенство центробежной силы и силы тяжести дает

$$M_к\frac{u^2}{r}=M_к g\frac{r_0^2}{r^2},$$

откуда скорость спутника на орбите $u=\sqrt{\frac{gr_0^2}{r}}$.

Чем больше расстояние r, тем меньше скорость u, необходимая для того, чтобы спутник вращался на соответствующей орбите. Однако это вовсе не означает, что легче запустить спутник на орбиту с весьма большим r, чем на орбиту с r, близким к r_0: ведь для вывода спутника на орбиту с большим r надо затратить большую энергию на преодоление силы тяжести на пути от земной поверхности до орбиты.

УДК 378.147:51

КОЛЕБАНИЯ ПОДВЕШЕННОГО СТЕРЖНЯ

О. А. Котович, Н. Н. Сендер
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, Брест,

Рассмотрим стержень, подвешенный в точке A (рисунок 1). Пусть центр тяжести находится ниже точки подвеса, причем расстояние между точкой подвеса и центром тяжести равно l. Такой стержень представляет собой маятник. Определим период его колебаний.

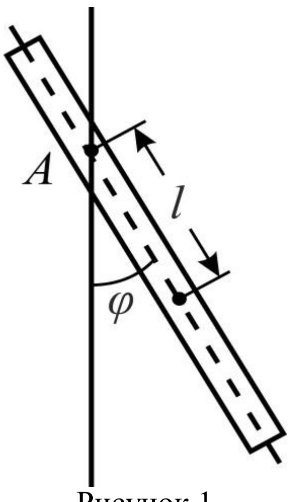

Рисунок 1

Если маятник отклонен от положения равновесия на малый угол φ, то его потенциальная энергия равна $u = -mgl\cos\varphi.$

Разложим $\cos\varphi$ в ряд и ввиду малости φ ограничимся первыми двумя членами: $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$ Поэтому

$$u = -mgl\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) = -mgl + mgl\frac{\varphi^2}{2}.$$

Таким образом, увеличение потенциальной энергии при отклонении маятника на угол φ от положения равновесия $(\varphi = 0)$ есть $\Delta u = mgl\frac{\varphi^2}{2}.$ Кинетическая энергия вращения стержня вокруг оси равна $E = I\frac{\omega^2}{2} = \; = I\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$ Используя формулу $I = ml^2 + I_0,$ получаем

$$E = \frac{1}{2}\left(ml^2 + I_0\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

где I_0 – момент инерции маятника относительно центра тяжести.

Предположим, что стержень совершает гармонические колебания, т. е. $\varphi = a\cos\omega t.$ По закону сохранения энергии $\Delta u_{\max} = E_{\max}.$ Так как

$$\frac{d\varphi}{dt} = -a\omega\sin\omega t,$$

то

$$E_{\max} = \frac{1}{2}\left(ml^2 + I_0\right)a^2\omega^2, \qquad \Delta u_{\max} = mgl\frac{a^2}{2},$$

откуда

$$mgl\frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(ml^2 + I_0)a^2\omega^2,$$

что дает

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2 + I_0}}.$$

Тогда период колебаний равен $T = \frac{2\pi}{\omega}.$

В частности, если вся масса стержня сосредоточена в его центре тяжести, то $I_0 = 0.$ В этом случае мы получаем обычные формулы для частоты и периода колебаний так называемого математического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \; T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Из полученных формул следует, что чем больше $I_0,$ тем меньше частота колебаний, соответственно тем больше период.

В случае, если $I_0 \neq 0,$ имеется определенное положение точки подвеса, при котором частота колебаний максимальна. Так как положение точки подвеса характеризуется величиной l, то для отыскания интересующего нас положения решим уравнение $\frac{d\omega}{dl} = 0.$ Это дает

$$mg\left(ml^2 + I_0\right) - mgl \cdot 2ml = 0,$$

откуда получаем $l_{\max} = \sqrt{\frac{I_0}{m}}.$ Для стержня длины L с равномерно распределенной массой $I_0 = \frac{mL^2}{12}$, поэтому $l_{\max} = \frac{L}{\sqrt{12}} \approx 0{,}3L.$

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е. В. Кузьмина

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, Брест

Научный руководитель: А. Б. Антоневич, доктор физ.-мат. наук, профессор

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$u'' + \gamma^2 u^3 + 3\gamma u u' = 0, \tag{1}$$

$$u(-1) = u'(-1) = -\frac{1}{\gamma}. \tag{2}$$

Уравнение (1) является при $n = 2$ уравнением обобщенной иерархии Риккати [1], записанной в виде

$D_R^n u = 0,\ n = 1, 2, 3, ...,$

где оператор D_R имеет вид

$D_R = \frac{d}{dx} + \gamma u,\ \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Очевидно, что функция $u(x) = \frac{1}{\gamma x}$ является решением задачи Коши для уравнения (1) с условиями (2). Нас интересует уравнение (1) с точки зрения теории обобщенных функций. Функция $\frac{1}{\gamma x}$ не задает обобщенную функцию, но ей соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций вида

$U = \frac{1}{\gamma}\left(P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta\right)$,

где M – произвольная постоянная, δ – дельта-функция Дирака, $P\left(\frac{1}{x}\right)$ – обобщенная функция, заданная выражением