УДК 378.147:51

РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ И ФОРМУЛА К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

В. В. Киричук, Н. Н. Сендер
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, Брест,

При движении в безвоздушном пространстве единственный способ управления полетом (изменения скорости и направления) заключается в отбрасывании части массы самого летящего тела, т. е. в применении реактивного принципа движения.

Русский ученый К. Э. Циолковский первый полностью осознал значение реактивного принципа и исследовал основные закономерности реактивного движения. От него, через его учеников и последователей, советских ученых и конструкторов, идет та научная традиция, воплощением которой явились советские искусственные спутники Земли, искусственные планеты и космические корабли с космонавтами на борту.

Выведем основное уравнение прямолинейного движения ракеты. Топливо ракеты – пусть будет порох или смесь горючего (спирта, бензина) и окислителя (кислорода, азотной кислоты) – обладает определенным запасом Q химической энергии на единицу массы (Q порядка 1000 ккал/кг для бездымного пороха и 2500 ккал/кг для бензина с кислородом). При сгорании эта химическая энергия превращается в тепловую энергию продуктов горения. Затем продукты горения вытекают через сопло; при этом тепловая энергия их превращается в кинетическую энергию движения.

Когда реактивный двигатель закреплен на испытательном стенде, продукты горения вытекают с определенной скоростью υ_0. При этом кинетическая энергия их на единицу массы составляет определенную долю химической энергии топлива:

$$\frac{u_0^2}{2} = aQ, \tag{1}$$

где a – безразмерное число – коэффициент полезного действия процессов горения и истечения газов. В дальнейшем будем считать скорость истечения u_0 известной, заданной величиной. Она составляет около 2 км/с для пороха и около 3 км/с для жидкого топлива. Легко убедиться, что этим величинам соответствуют значения $a \approx 0{,}5$ (КПД порядка $50\,\%$).

До горения топливо покоилось. Пусть сгорела и вытекла из сопла масса dm топлива. При этом она приобрела импульс dI. Очевидно, что импульс силы $u_0 dm$, с которой ракета действует на эту массу, равен импульсу, приобретенному массой dm:

$$dI = Fdt = u_0 dm.$$

По закону равенства действия и противодействия импульс силы, с которой масса dm продуктов горения действует на ракету, равен той же величине с обратным знаком. Пусть, например, скорость истечения u_0 направлена в сторону убывания x. Тогда u_0 отрицательно, $u_0 = -|u_0|$. Для импульса силы, действующей на ракету, имеем:

$$dI_p = F_p dt = -u_0 dm = |u_0| dm. \tag{2}$$

Получим

$$I' = \frac{dI}{dm} = |u_0| \tag{3}$$

есть импульс силы, приходящейся на единицу массы, так называемый единичный импульс. Эта величина равна скорости истечения газов из покоящейся ракеты.

Проверим размерность в формуле (3). Сила F имеет размерность $г \cdot см / с^2$ импульс силы I – это произведение силы на время, поэтому его размерность $г \cdot см / с$. Размерность $\frac{dI}{dm}$ есть $г \cdot см / (с \cdot г) = см / с$ – это размерность скорости. Для пороховых газов $u_0 = 2 \cdot 10^5 = 2$ км/с, для жидкого топлива $u_0 = 3$км/с.

Сила, действующая на ракету, по формуле (2) есть

$$F_p = |u_0| \frac{dm}{dt}.$$

Она пропорциональна количеству газов, вытекающему в единицу времени.

Обратимся теперь к выводу формулы для скорости движения ракеты. Если ракета сама движется с какой-то скоростью u, то скорость истечения газов отлична от u_0 и равна $u + u_0 = u - |u_0|$ (напомним, что в покоящейся ракете скорость истечения газов равнялась $-|u_0|$). Очевидно, что такие величины, как *разность* скоростей пороха до горения и вытекших пороховых газов и *сила*, с которой на ракету действуют пороховые газы, не зависят от того, движется или покоится ракета.

Обозначим начальную массу ракеты вместе с порохом M_0. Массу вытекших пороховых газов обозначим m. Величина m есть функция времени, $m = m(t)$. Обозначение m находится в соответствии с тем, что малую вытекшую массу мы обозначали dm, количество пороховых газов, вытекающее в единицу времени, $\frac{dm}{dt}$. Масса ракеты с порохом в момент t равна

$$M = M(t) = M_0 - m(t). \tag{4}$$

Уравнение движения (второй закон Ньютона):

$$M \frac{du}{dt} = F = |u_0| \frac{dm}{dt}.$$

Это уравнение можно записать так: $Mdu = |u_0| dm,$ или, пользуясь (4)

$$(M_0 - m)\frac{du}{dm} = |u_0|. \tag{5}$$

Возможность сократить dt физически означает, что (при отсутствии других сил, действующих на ракету) скорость ракеты зависит только от количества вытекших пороховых газов (при фиксированной величине u_0). К моменту, когда из сопла вытекло данное количество пороховых газов m, ракета приобретает определенную скорость u, независимо от того, за какое время произошло вытекание данного количества пороховых газов.

Нетрудно решить уравнение (5). В начальный момент, при $m=0$, $u=0$. Поэтому получаем

$$u=|u_0|\int_0^m \frac{dm}{M_0-m}=-|u_0|\ln(M_0-m)\Big|_0^m=$$

$$=|u_0|[-\ln(M_0-m)+\ln M_0]=|u_0|\ln\frac{M_0}{M_0-m}=|u_0|\ln\frac{M_0}{M}.$$

Итак

$$u=|u_0|\ln\frac{M_0}{M}. \tag{6}$$

Эта формула впервые была получена К. Э. Циолковским и носит его имя. Нас интересует конечная скорость $u_к$ к моменту окончания горения всего топлива, то надо в формулу (6) подставить вместо M величину $M_к$ – конечную массу ракеты после сгорания всего топлива: $M_к=M_0-m_п$, где $m_п$ – полная масса всего топлива. Получим

$$u_к=|u_0|\ln\frac{M_0}{M_к}. \tag{7}$$

При помощи этой формулы легко решается и обратная задача: какой нужно взять начальную массу ракеты для того, чтобы данной конечной массе $M_к$ придать определенную скорость $u_к$:

$$\ln\frac{M_0}{M_к}=\frac{u_к}{|u_0|},$$

откуда

$$M_0=M_к e^{u_к}/|u_к|. \tag{8}$$

Для того чтобы тело вращалось вокруг Земли в виде спутника, нужно, чтобы его центробежная сила уравновешивала силу притяжения Земли. Соответствующая скорость u_1 называется первой космической скоростью. Для ее определения получаем

$$M_к\frac{u_1^2}{R}=M_к g, \tag{9}$$

где R – радиус орбиты. Он приблизительно равен радиусу Земли r_0, поэтому в правой части (9) в качестве силы притяжения взята сила тяжести на поверхности Земли. Из формулы (9) находим

$u_1=\sqrt{gR}\approx\sqrt{gr_0}\approx 8$ км/с.

Для спутника, летящего на расстоянии r от центра Земли, значительно отличающемся от r_0, надо учесть, что с изменением высоты меняется величина ускорения силы тяжести, равная g на поверхности Земли. Действительно, по закону тяготения Ньютона тело, отстоящее на расстоянии r от центра Земли, притягивается к Земле с силой $F = \chi \frac{mM}{r^2}$, где m – масса тела, M – масса Земли. С другой стороны, по второму закону Ньютона $F = ma$, где a – ускорение силы тяжести на расстоянии r от центра Земли. Сравнивая два выражения для F, находим $a = \frac{\chi M}{r^2}$. Если $r = r_0$, то $a = g$, поэтому $g = \frac{\chi M}{r_0^2}$, откуда $\chi = \frac{g r_0^2}{M}$.

Окончательно получаем $a = g\frac{r_0^2}{r^2}$. В этом случае равенство центробежной силы и силы тяжести дает

$$M_к \frac{u^2}{r} = M_к g \frac{r_0^2}{r^2},$$

откуда скорость спутника на орбите $u = \sqrt{\frac{g r_0^2}{r}}$.

Чем больше расстояние r, тем меньше скорость u, необходимая для того, чтобы спутник вращался на соответствующей орбите. Однако это вовсе не означает, что легче запустить спутник на орбиту с весьма большим r, чем на орбиту с r, близким к r_0: ведь для вывода спутника на орбиту с большим r надо затратить большую энергию на преодоление силы тяжести на пути от земной поверхности до орбиты.

УДК 378.147:51

КОЛЕБАНИЯ ПОДВЕШЕННОГО СТЕРЖНЯ

О. А. Котович, Н. Н. Сендер
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, Брест,

Рассмотрим стержень, подвешенный в точке A (рисунок 1). Пусть центр тяжести находится ниже точки подвеса, причем расстояние между точкой подвеса и центром тяжести равно l. Такой стержень представляет собой маятник. Определим период его колебаний.

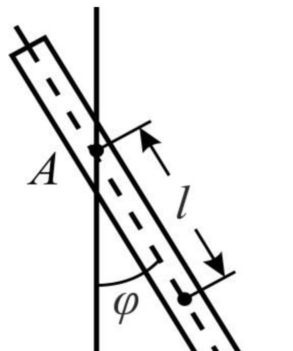

Рисунок 1