

Таким образом, для определения вязкости разрушения  $K_{IIc}$  путем испытания балочных образцов с трещиной, расположенной по нейтральной оси (рис. 2.6), можно воспользоваться следующей функциональной зависимостью:

$$K_{IIc} = \frac{3 Q_{max}}{4 bh} Y_{II} \sqrt{\pi l}, \quad (11)$$

где  $Q_{max}$  — величина поперечной силы в вертикальном сечении, проходящем через вершину трещины, соответствующая старту трещины;

$Y_{II}$  — безразмерный коэффициент интенсивности напряжений, определяемый по формуле (10).

### ВЫВОДЫ

1. Для описания процесса разрушения древесины от действия кратковременной статической нагрузки в случае поперечного сдвига (скалывания вдоль волокон) приемлемы критерии линейной механики разрушения.
2. Полученные методом конечных элементов зависимости коэффициентов интенсивности напряжений  $K_{II}$  для балочных и призматических образцов могут быть использованы для определения вязкости разрушения древесины  $K_{IIc}$ .

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 25.506 — 85 Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний материалов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении. — М.: Издательство стандартов, 1985 — 61 с.
2. Панасюк В.В. Механика разрушения и прочность материалов. Т.2. Киев, Наукова думка, 1988, -620 с.
3. Механика хрупкого разрушения. Г.П. Черепанов — М.: издательство "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1974 — 640 с.
4. Писаренко Г.С., Науменко В.П. Экспериментальные методы механики разрушения материалов// Физ.-хим. Механика материалов. — 1982. — № 2. — с. 28-41.

УДК 624.014.2

Новиков В.Е.

## ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СТАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Определение напряженно-деформированного состояния стержневого элемента в линейной постановке представляет собой прямую краевую задачу пространственной теории упругости. Решение задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. Точное аналитическое решение даже линейной задачи в общем виде затруднительно, в связи с чем прибегают к различным упрощениям или приближенным методам решения. К ним отнесем наиболее известные метод взвешенных невязок, метод Бубнова-Галеркина, метод Релея-Ритца, метод конечных элементов, метод граничных элементов. Решение некоторыми методами данной задачи с учетом физической и геометрической нелинейностей также возможно, но более сложно, чем линейной.

Другой подход состоит в сведении геометрически нелинейной объемной задачи (3d) пространственной теории пластичности к физически нелинейной плоской задаче (2d) и геометрически нелинейной одномерной задаче (1d). При решении двумерной задачи обычно рассматривается поперечное сечение, а при одномерной — продольная ось стержневого элемента.

В расчетной модели рассматривается стержневой элемент, который:

- прямолинеен, не имеет начальных деформаций;
- имеет произвольное односвязное поперечное сечение нормальное продольной оси  $X$ ;
- воспринимает крутящий  $M_x$  и изгибающие моменты в двух плоскостях  $M_y, M_z$ , продольное усилие  $N_x$ .

Предлагаемая расчетная модель описывает напряженно-деформированное состояние произвольного односвязного стального поперечного сечения (рис. 1), представляет собой систему интегральных уравнений и включает в себя:

- уравнения равновесия внешних и внутренних усилий в сечении;
- кинематические законы распределения деформаций в сечении в упругопластической стадии работы конструкции;
- зависимости между деформациями и напряжениями (диаграммы деформирования), в общем виде немонотонные и негладкие;
- зависимости деформационной теории пластичности;
- классическую теорию кручения Сен-Венана.

Система уравнений расчетной модели устанавливает связь между вектором внешней нагрузки  $f$  и вектором параметров деформаций  $u$ , она может не иметь решений, либо иметь несколько решений.

Расчетная модель стальных сечений является обобщением и развитием деформационной модели, используемой в теории железобетона [3, 9], а также методов, используемых для расчета сечений стальных конструкций по критерию ограниченных пластических деформаций [15, 17, 18].

## 2. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ СТАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} N_x - \langle \sigma_x \rangle = 0 \\ M_x - \langle \tau_{xy}(z - z_0) - \tau_{xz}(y - y_0) \rangle = 0 \\ M_y - N_x(z_N - z_0) - \langle \sigma_x(z - z_0) \rangle = 0 \\ M_z - N_x(y_N - y_0) - \langle \sigma_x(y - y_0) \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f - F(u) = 0,$$

- где  $f$  — вектор нагрузок на сечение;
- $F(u)$  — вектор-функция внутренних усилий в сечении;
- $u = \{\epsilon_{0x}, k_x, k_y, k_z\}^T$  — вектор параметров деформаций;
- $\sigma_x = \sigma_x(y, z)$ ,
- $\tau_{xy} = \tau_{xy}(y, z)$ ,
- $\tau_{xz} = \tau_{xz}(y, z)$  — функции нормальных и касательных напряжений;
- $y, z$  — координаты рассматриваемой точки сечения;
- $y_N, z_N$  — координаты точки приложения продольного усилия  $N_x$ ;
- $y_0, z_0$  — координаты центра сопротивления изгибу сечения (может не совпадать с центром тяжести и с центром сдвига сечения, на рис. 1 — точка  $O$ ).

Здесь и далее принято обозначение интегрирования по поперечному сечению:

$$\langle \bullet \rangle = \int_A \bullet dA.$$

Распределение относительных деформаций в сечении в упругой стадии:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_{0x} - k_y(z - z_0) - k_z(y - y_0), \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \epsilon_x, \\ \gamma_{xy} &= k_x(\varphi_y - (z - z_0)), \quad \gamma_{xz} = k_x(\varphi_z + (y - y_0)), \end{aligned}$$

где  $\varphi = \varphi(y, z)$  — функция кручения Сен-Венана (функция депланации), а также здесь и далее принято обозначение частной производной  $\varphi_{,i} = \partial \varphi / \partial x_i$ .

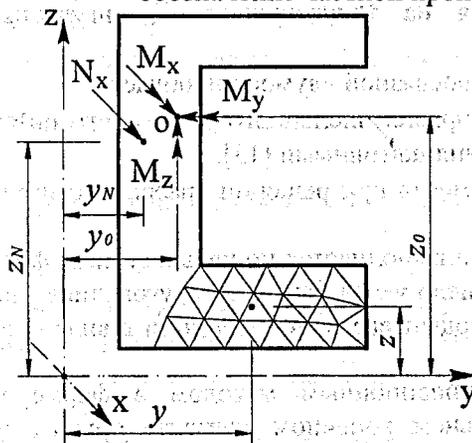


Рисунок 1 — Поперечное сечение стального стержня

Очевидно, что продольные деформации подчиняются гипотезе плоских сечений (гипотеза Бернулли-Эйлера).

В предлагаемой расчетной модели принимается также следующее допущение: распределение относительных деформаций в упругопластической стадии эквивалентно их распределению в упругой стадии.

Кроме приведенных зависимостей, в расчетную модель входят также диаграммы деформирования материалов  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ , связывающие интенсивности деформаций и напряжений. Функция интенсивности деформаций:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(y, z) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2)}.$$

Интенсивности напряжений определяются по диаграммам деформирования материалов, которые можно получить из зависимостей  $\sigma_t = \varepsilon_t$  одноосного растяжения материалов:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_i + \frac{1-2\mu}{E} G \varepsilon_i, \quad \sigma_t = \sigma_i,$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона в упругопластической стадии.

В общем виде коэффициент Пуассона может быть переменным и представлять собой функцию  $\mu = \mu(x, y)$ . Например, можно использовать функцию:

$$\mu = 0.5 - \frac{0.5 - \mu_{el}}{E} \frac{\sigma_t}{\varepsilon_t},$$

где  $\mu_{el}$  — коэффициент Пуассона материала в упругой стадии.

Из уравнений Генки-Ильюшина деформационной теории пластичности с учетом  $\sigma_y = \sigma_z = 0$  (отсутствие давления между соседними продольными волокнами) имеем выражение для нормального напряжения в упругопластической стадии:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_0).$$

В формулах  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$  — средние напряжение (гидростатическое) и деформация.

Касательные напряжения в упругопластической стадии:

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3E_i} \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = \frac{\sigma_i}{3E_i} \gamma_{xz}.$$

Определение функции кручения, как известно, сводится к однородной задаче Неймана:

$$\Delta \varphi = 0$$

при краевом условии, выражающем отсутствие нагрузки на контуре сечения:

$$\varphi_{,n} = z \cos \alpha - y \sin \alpha = z p_y - y p_z,$$

где  $\Delta$  — двумерный оператор Лапласа;

$p_y, p_z$  — нормаль к контуру сечения и угол ее наклона к оси Y.

Кроме того, считается справедливым условие  $\langle \varphi \rangle = 0$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Предварительно поперечное сечение разбивается на треугольники. Триангуляция дает следующие преимущества:

- достаточная точность аппроксимации произвольной односвязной двумерной области;
- эффективность использования немультимпликативных правил численного двумерного интегрирования по треугольным областям по сравнению с мультипликативными [13];
- использование треугольника в качестве конечного элемента при решении краевой задачи в сечении методом конечных элементов.

Численное интегрирование по поперечному сечению выполняется по квадратурным формулам Гаусса для треугольника. Максимальное реализованное число узлов Гаусса в треугольнике равно 13, что дает точное значение определенного интеграла для подынтегральной функции в виде полинома 7-й степени и позволяет уменьшить число треугольников.

Определение функции кручения выполняется вариационным методом в форме метода конечных элементов [10]. Функция формы на треугольном конечном элементе принята в виде полинома второй степени.

Для решения системы нелинейных уравнений модели можно использовать методы дискретного или непрерывного продолжения по параметру, а также их сочетания.

Методы дискретного продолжения по параметру (МДПП) являются итерационными, наиболее часто используются метод простой итерации, метод Ньютона-Рафсона и его модификации, обобщенный метод секущих, квазиньютоновские методы. В нашем случае некоторые из перечисленных методов имеют физическую интерпретацию в виде методов переменных параметров упругости [4], дополнительных нагрузок [11], дополнительных деформаций [5], комбинированного метода [15]. Заметим, что перечисленные варианты метода упругих решений [11] являются более общими и могут использоваться не только при сведении задачи к системе нелинейных уравнений.

В качестве первого приближения вектора параметров деформаций  $u$  в МДПП выгоднее принять не нулевые значения, а значения полученные из упругого расчета:

$$u = \langle d \rangle^{-1} f,$$

где симметрическая матрица:

$$d = d(y, z) = \begin{matrix} N_x & \begin{matrix} E & 0 & E(z-z_0) & E(y-y_0) \\ & d_{22} & 0 & 0 \end{matrix} \\ M_z & \begin{matrix} \text{симметрично} & & E(z-z_0)^2 & E(y-y_0)(z-z_0) \\ & & & E(y-y_0)^2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$d_{22} = G[\varphi_z(y-y_0) - \varphi_y(z-z_0) + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2].$$

Нулевые элементы матрицы жесткости сечения  $\langle d \rangle$  указывают на отсутствие взаимовлияния (при принятых нами допущениях) соответствующих силовых факторов.

Для метода Ньютона-Рафсона (МНР), имеющего квадратичную скорость сходимости, новый вектор деформаций на  $i$ -той итерации определяется:

$$u_{(i+1)} = u_{(i)} - J_{(i)}^{-1}[f - F(u_{(i)})],$$

где  $J_{(i)}^{-1}$  – матрица, псевдообратная матрице Якоби.

Заметим, что введение псевдообратной матрицы (Мура-Пенроуза) [6] для матрицы Якоби, вместо обычной обратной, позволяет продолжать решение в случаях, когда  $J_{(i)}$  становится особенной ( $\det(J_{(i)}) = 0$ ). Например, это происходит, когда одна из нагрузок не равна нулю. Этого можно избежать фиктивным введением малых значений других нагрузок, однако принятие таких значений не очевидно.

Неплохую скорость при тестировании показали методы, имеющие более высокий, чем второй порядок [16]. Например, применяя однажды многоточечную рекуррентную формулу для МНР, имеем метод уже 3-его порядка:

$$u_{(i+1)} = \lambda_{(i)} - J_{(i)}^{-1}\psi(\lambda_{(i)}), \lambda_{(i)} = u_{(i)} - J_{(i)}^{-1}\psi(u_{(i)}), \psi(u_{(i)}) = f - F(u_{(i)}).$$

Методы непрерывного продолжения по параметру (МНПП) более медленные, но позволяют проследить напряженно-деформированное состояние сечения на всей истории нагружения, что в том числе дает возможность учесть временные процессы – коррозию, влияние температуры и др. Кроме того, некоторые из них позволяют исследовать “запредельную” работу сечения и найти все возможные решения. Наиболее часто используются методы Эйлера (метод последовательных нагружений), явные и неявные методы Рунге-Кутты различных порядков, метод длины дуги (arc-length).

В постановке Давиденко Д.Ф. [8] МНПП для решения системы нелинейных уравнений имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = -J^{-1}(u) \frac{df(t)}{dt}.$$

Принимая пропорциональное нагружение  $f(t) = t f$ , где  $t$  – параметр  $0 < t \leq 1$  имеем:

$$\frac{du}{dt} = -J^{-1}(u) f.$$

Это есть система обыкновенных линейных относительно производной дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Неизвестная вектор-функция параметров деформаций  $u(t)$  удовлетворяет начальным условиям:

$$u(t_0) = u(0) = 0,$$

что соответствует начальному ненагруженному состоянию сечения.

Данная постановка задачи является методом непрерывного продолжения решения по параметру и сводится к интегрированию задач Коши.

При использовании одношагового метода Рунге-Кутты второго порядка [2] вектор параметров деформаций на шаге  $n+1$ :

$$u_{n+1} = u_n - k_2 + O(h^3)$$

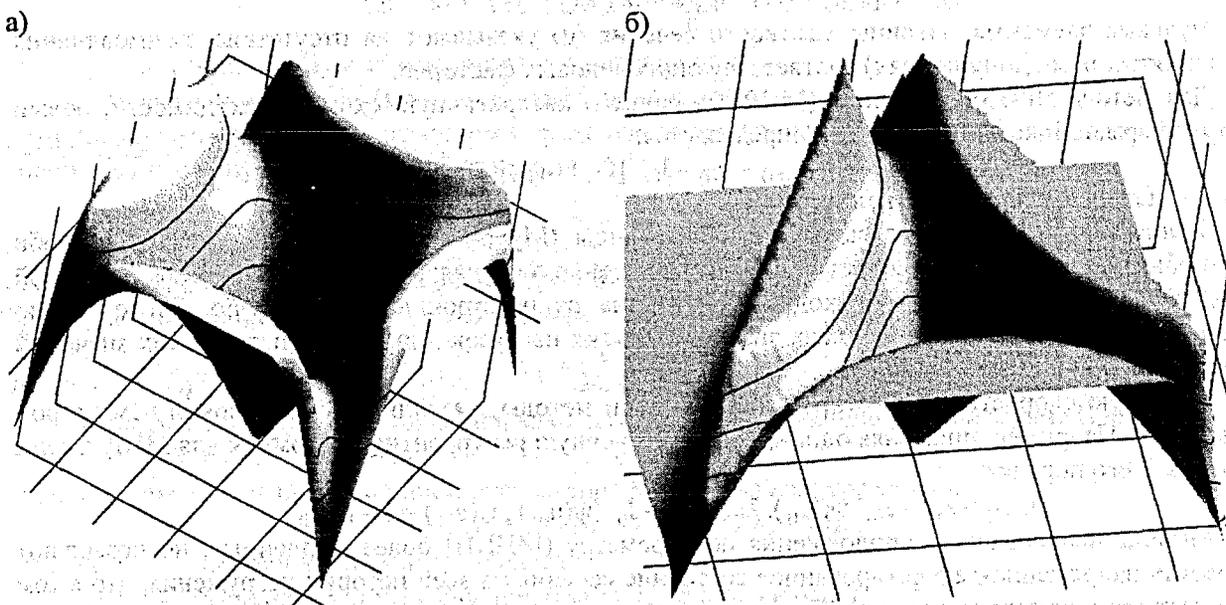
$$k_1 = \Delta t_n \varphi(u_n), k_2 = \Delta t_n \varphi(u_n - 0.5 k_1), \Delta t_n = t_{n+1} - t_n,$$

где  $\varphi(u_n) = \Gamma^{-1}(u_n) f$  – правая часть системы ОДУ,  $O(h^3)$  – погрешность метода.

Приведенные алгоритмы реализованы в компьютерной программе FPLASTIC, состоящей из расчетного модуля и интерфейсного модуля, интегрированного в пре-постпроцессор FEMAP, и служащего для ввода исходных данных и анализа результатов.

Качественное распределение интенсивностей напряжений в упругопластической стадии для некоторых сечений при действии только крутящего момента  $M_x$  приведено на рис. 2. Для закона деформирования принята диаграмма Прандтля, горизонтальные участки поверхностей соответствуют зонам развития пластических деформаций. Сходимость решения при использовании МНР достигнута за три итерации, при евклидовой норме относительной погрешности невязки нагрузок и внутренних усилий в сечении, равной 0.001.

Распределение интенсивностей напряжений соответствует распределению, полученному для упругопластического кручения другими методами [0, 7, 12, 14].



а) для квадратного сечения; б) для сечения в виде равностороннего треугольника

Рисунок 2 – Поверхности интенсивностей напряжений в упругопластической стадии при действии  $M_x$

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. – Новосибирск. Наука, 1983. – 238с.
2. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 336 с.
3. Байков В.Н., Додонов М.И., Расторгуев Б.С. Общий метод расчета железобетонных конструкций // Бетон и железобетон, № 5, 1987. – с. 13–17.
4. Биргер И.А. Круглые пластинки и оболочки вращения. – М.: Оборонгиз, 1961. – 367с.
5. Биргер И.А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // «Известия АН СССР. Механика», 1965, №2, с. 113–119.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 576с.
7. Гловински Р., Лионс Ж.П., Трёмольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574с.
8. Давиденко Д.Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5, №2. – с. 196–206.
9. Залесов А.С., Чистяков Е.А., Ларичева И.Ю. Деформационная расчетная модель железобетонных элементов при действии изгибающих моментов и продольных сил // Бетон и железобетон, №5, 1996. – с. 16–18.

10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542с.
11. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376с.
12. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 420с.
13. Лазовский Д.Н., Глухов Д.О. Численный анализ расчетной модели нормального сечения железобетонной конструкции проекта СНБ 5.03.01-98 // Материалы 54-ой международной научно-технической конференции «Вклад вузовской науки в развитие приоритетных направлений производственно-хозяйственной деятельности» – Часть 7. – Минск: БГПА, 2000. – с. 9.
14. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 494с.
15. Потапкин А.А. Проектирование стальных мостов с учетом пластических деформаций. – М.: Транспорт, 1984. – 200с.
16. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 264с.
17. Чернов Н.Л., Артюшкин И. А., Купченко Ю. В., Шебанин В. С. Расчет элементов стальных стержневых систем за пределами упругости по деформированной схеме // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. – 1991, №2. – с. 3–7.
18. Чернов Н.Л., Шебанин В.С., Купченко Ю.В., Ебрахим Валид, Артюшкин И.А. Прочность сечений стальных тонкостенных стержней при ограниченных пластических деформациях // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1990. – №4. – с. 1–5.

УДК 614.841.33

*Полейко Н.Л., Осос Р.Ф., Ковшар С.Н., Гуров И.Н., Бондарович А.И., Ильющенко М.А.*

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕНОВЫХ ПАНЕЛЕЙ С УТЕПЛИТЕЛЕМ ИЗ МИНЕРАЛЬНОЙ ВАТЫ

Трехслойные панели включают в себя две обшивки из тонколистового проката и приклеиваемый к ним средний слой из минераловатных плит с поперечно-ориентированными волокнами, обеспечивающий совместную работу обшивок (далее - панели).

Панели предназначены для устройства наружных и внутренних стен, а также покрытий общественных, административных, производственных, бытовых зданий и сооружений с сухим или нормальным влажностным режимом помещений, эксплуатируемых в неагрессивных и слабоагрессивных средах при температуре наружной поверхности панели от минус 65 °С до плюс 75 °С, температуре внутренней поверхности панели до плюс 30 °С, при относительной влажности воздуха внутри помещения не более 65%, а также зданий и помещений холодильных и морозильных камер.

Основными конструкционными требованиями, предъявляемыми к металлическим трехслойным панелям с утеплителем из минеральной ваты, является прочность и деформативность. Эти два показателя зависят от вида применяемых материалов – минеральной ваты и стального листа, геометрических размеров панели и качества изготовления изделий. Проведение исследований трехслойных металлических панелей с утеплителем из минеральной ваты позволят установить зависимости влияния на прочность и деформативность различных типов минеральной ваты, клея и прочность сцепления металлических листов с утеплителем при изготовлении панелей на различных технологических линиях.

Программа испытаний включает испытание панелей согласно ТУ РБ 37430847.166-98 «Панели металлические с утеплителем из минераловатных плит», анализ результатов, полученных теоретическим расчетом, реализованном в ППП «Лира».

Испытания на прочность и обработка результатов производится по утвержденным методикам, разработанных на основании Европейских рекомендаций ECCS/CIB и требований стандартов EN, DIN, ASTM, относящихся к испытанию теплоизоляционных материалов и конструкций.

Виртуальные испытания плиты минеральной трехслойной (приведен пример расчета плиты ППС 3200×1190×100) ведется на основе физико-механических характеристик составляющих плиту материалов, полученных лабораторным путем (см. табл. 1). В основу расчета положен метод конечных элементов в перемещениях. Расчетные сочетания напряжений для пластинчатых элементов выбираются по критерию экстремальных напряжений с учетом направления главных площадок. При выборе расчетных сочетаний усилий учитывались следующие характеристики загружений:

загружение 1 - статическое нагружение: