Следует отметить, что описанный гибридный метод особенно эффективен в случае, когда $p >> q - p >> N - q$. Универсальность метода заключается в том, что процедуры, описанные в работе естественно индуцируются и на те случае, когда число подынтервалов болеше трех, а в случае неустойчивости классических схем методов редукции и матричной прогонки могут быть реализованы методы множественной редукции и множественного марш-алгоритма[3].

Литература. 1. Монастырный П.И. Доклады АН Беларуси. 2000 Т 44, №1 – С. 35-38. **2.** Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы – М.: Наука, 1989. **3.** Монастырный П.И., Азаров А.И., Артюгин В.Г. Доклады АН Беларуси. 1991. Т. 35, № 12 – С. 1065-1068

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА

Стрилец Н. Н., БрГУ, Брест

Рассматривается периодическая краевая задача Дуффинга [1]:

$$\ddot{x}(t) + 0.2\dot{x}(t) + x(t) + x^3(t) = 50\cos t,$$
$$x(0) - x(2\pi) = 0,\ \dot{x}(0) - \dot{x}(2\pi) = 0.$$

Достаточно популярным для решения такого типа задач является конечно-разностный метод.

Суть его заключается в том, что решение краевой задачи в результате дискретизации и замены производных их разностными аналогами (например, по методу неопределенных коэффициентов [2]) сводится к решению системы нелинейных уравнений. Полученную систему, как правило, решают одним из сверхлинейных квазиньютоновских итерационных методов 2-го порядка [3]. Однако здесь в процессе приближения к решению может наблюдаться разболтка. Поэтому на практике хорошо себя зарекомендовала следующая схема: просчет сначала ведут методом 2-го порядка до точности 10^{-2}, а затем подключают метод 3-го порядка [4].

Для оценки эффективности полученного из нелинейной системы сеточного решения его обычно восстанавливают в аналитическом виде с последующей подстановкой в исходную дифференциальную задачу. Всюду далее под эффективностью будем понимать малость нормы невязки на восстановленном приближенном решении. При этом эффективность оценки приближенного решения часто существенно зависит от способа аппроксимации.

В настоящее время существует много различных методов аппроксимации функций. Среди них достаточно широкое применение в периодическом случае получили аппроксимация отрезком тригонометрического ряда Фурье и сплайнами. В данной работе были исследованы кубический сплайн, сплайн 5-ой и 7-ой степеней, естественные сплайны произвольной степени.

Естественные сплайны подробно описаны в работе [5].

Кубический сплайн детально разобран в работе [6].

Следуя идеям этой же работы, можно вывести аналогичные формулы и для сплайнов 5-ой [7] и 7-ой степеней. Приведем принципиальную схему построения сплайна 7-ой степени.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана равномерная сетка

$$\overline{\Delta}_n : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

с шагом h. Введем обозначения: $S_7(t)$ – сплайн 7-ой степени, $x(t_i) = x_i$, $S_7''(t_i) = A_i$, $S_7^{\mathrm{IV}}(t_i) = B_i$, $S_7^{\mathrm{VI}}(t_i) = C_i$, $i = \overline{0,n}$.

При этом предполагалось, что в случае периодического сплайна имеют место периодические краевые условия

$$S_7^{(k)}(a) = S_7^{(k)}(b),\ k = \overline{0,6},$$

а в случае непериодического сплайна – непериодические краевые условия

$$S_7^{(2k+1)}(a) = x_a^{(2k+1)},\ S_7^{(2k+1)}(b) = x_b^{(2k+1)},\ k = 0,2.$$

Тогда кусочно-многочленная форма представления сплайна 7-ой степени имеет вид:

$$S_7(t) = x_i + \left[\frac{\Delta x_i}{h} - \frac{h}{6}(2A_i + A_{i+1}) + \frac{h^3}{360}(8B_i + 7B_{i+1}) - \right.$$

$$\left. - \frac{h^5}{15120}(32C_i + 31C_{i+1})\right](t - t_i) + \frac{A_i}{2}(t - t_i)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\frac{\Delta A_i}{h} - \frac{h}{6}(2B_i + B_{i+1}) + \frac{h^3}{360}(8C_i + 7C_{i+1})\right](t - t_i)^3 +$$

$$+ \frac{B_i}{24}(t - t_i)^4 + \frac{1}{120}\left[\frac{\Delta B_i}{h} - \frac{h}{6}(2C_i + C_{i+1})\right](t - t_i)^5 +$$

$$+ \frac{C_i}{720}(t - t_i)^6 + \frac{\Delta C_i}{5040h}(t - t_i)^7,\quad t \in [t_i, t_{i+1}],\quad i = \overline{0, n-1},$$

где параметры A_i, B_i, C_i определяются из линейной системы порядка $3n$:

$$
\begin{cases}
\dfrac{4A_0+A_1+A_{n-1}}{6h^4}-\dfrac{16B_0+7B_1+7B_{n-1}}{360h^2}+\dfrac{64C_0+31C_1+31C_{n-1}}{15120}=\dfrac{-2x_0+x_1+x_{n-1}}{h^6},\\
\dfrac{A_{i-1}+4A_i+A_{i+1}}{6h^4}-\dfrac{7B_{i+1}+16B_i+7B_{i+1}}{360h^2}+\dfrac{31C_{i+1}+64C_i+31C_{i+1}}{15120}=\dfrac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^6},\ i=\overline{1,n-2},\\
\dfrac{A_0+A_{n-2}+4A_{n-1}}{6h^4}-\dfrac{7B_0+7B_{n-2}+16B_{n-1}}{360h^2}+\dfrac{31C_0+31C_{n-2}+64C_{n-1}}{15120}=\dfrac{x_0+x_{n-2}-2x_{n-1}}{h^6}\\
\dfrac{-2A_0+A_1+A_{n-1}}{h^4}-\dfrac{4B_0+B_1+B_{n-1}}{6h^2}+\dfrac{16C_0+7C_1+7C_{n-1}}{360}=0,\\
\dfrac{A_{i-1}+-2A_i+A_{i+1}}{h^4}-\dfrac{B_{i+1}+4B_i+B_{i+1}}{6h^2}+\dfrac{7C_{i+1}+16C_i+7C_{i+1}}{360}=0,\ i=\overline{1,n-2},\\
\dfrac{A_0+A_{n-2}-2A_{n-1}}{h^4}-\dfrac{B_0+B_{n-2}+4B_{n-1}}{6h^2}+\dfrac{7C_0+7C_{n-2}+16C_{n-1}}{360}=0,\\
\dfrac{2B_0-B_1-B_{n-1}}{h^2}+\dfrac{4C_0+C_1+C_{n-1}}{6}=0,\\
\dfrac{-B_{i-1}+2B_i-B_{i+1}}{h^2}+\dfrac{C_{i-1}+4C_i+C_{i+1}}{6}=0,\ i=\overline{1,n-2},\\
\dfrac{-B_0-B_{n-2}+2B_{n-1}}{h^2}+\dfrac{C_0+C_{n-2}+4C_{n-1}}{6}=0,
\end{cases}
$$

если $x(t)$ – периодическая функция, и из линейной системы порядка $3n+3$:

$$
\begin{cases}
\dfrac{2A_0+A_1}{6h^4}-\dfrac{8B_0+7B_1}{360h^2}+\dfrac{32C_0+31C_1}{15120}=\dfrac{\Delta x_0}{h^6}-\dfrac{x'_a}{h^5},\\
\dfrac{A_{i-1}+4A_i+A_{i+1}}{6h^4}-\dfrac{7B_{i+1}+16B_i+7B_{i+1}}{360h^2}+\dfrac{31C_{i+1}+64C_i+31C_{i+1}}{15120}=\dfrac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^6},\ i=\overline{1,n-1},\\
\dfrac{A_{n-1}+2A_n}{6h^4}-\dfrac{7B_{n-1}+8B_n}{360h^2}+\dfrac{31C_{n-1}+32C_n}{15120}=\dfrac{x'_b}{h^5}-\dfrac{\Delta x_{n-1}}{h^6}\\
\dfrac{A_0-A_1}{h^4}-\dfrac{2B_0+B_1}{6h^2}+\dfrac{8C_0+7C_1}{360}=-x'''_a h,\\
\dfrac{A_{i-1}+-2A_i+A_{i+1}}{h^4}-\dfrac{B_{i+1}+4B_i+B_{i+1}}{6h^2}+\dfrac{7C_{i+1}+16C_i+7C_{i+1}}{360}=0,\ i=\overline{1,n-1},\\
\dfrac{-A_{n-1}+A_n}{h^4}-\dfrac{B_{n-1}+2B_n}{6h^2}+\dfrac{7C_{n-1}+8C_n}{360}=x'''_b h,\\
\dfrac{B_0-B_1}{h^2}+\dfrac{2C_0+C_1}{6}=-x^V_a h,\\
\dfrac{-B_{i-1}+2B_i-B_{i+1}}{h^2}+\dfrac{C_{i-1}+4C_i+C_{i+1}}{6}=0,\ i=\overline{1,n-1},\\
\dfrac{-B_{n-1}+B_n}{h^2}+\dfrac{C_{n-1}+2C_n}{6}=x^V_b h;
\end{cases}
$$

если $x(t)$ – непериодическая функция.

Вычислительный эксперимент показал, что наиболее эффективным для аппроксимации приближенных решений периодических краевых задач является отрезок тригонометрического ряда Фурье. С ним сравним по точности сплайн 7-ой степени (как естественный, так и описанный в данной работе). Несколько худшие результаты дает сплайн 5-ой степени. При этом необходимо отметить то обстоятельство, что с увеличением числа узлов аппроксимации различия между описанными выше подходами становятся практически неощутимыми. Аппроксимация же кубическим сплайном оказалась наименее эффективной ввиду своей невысокой точности.

Литература. 1. Крюков Б. И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. – М., 1984. **2.** Березин И. С. Жидков Н.П. Методы вычислений. В 2-х т.: Т. 1. – М., 1966. **3.** Мадорский В. М. Локализация решений нелинейных уравнений // Труды Института математики НАН Беларуси – Минск, 2002. – Т. 11. – С. 96 – 103. **4.** Мадорский В. М. Численная локализация решений нелинейных уравнений методами третьего порядка // Труды междунар. науч. конф. SAATS-97 – Брест, 1997. – С. 241 – 248. **5.** Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. Естественные сплайны произвольной степени// Доклады РАН. – 1966. – Т. 351. № 6. – С. 738-742. **6.** Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Сплайн-аппроксимация функций. – М, 1983. **7.** Мадорский В. М., Стрилец Н. Н. К вопросу аппроксимации функций сплайном пятой степени // Вестник Брестского ун-та. – 2002. – № 4. – С. 24 – 32.

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПИКАРА НА ОСНОВЕ КУСОЧНО-ЭРМИТОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Фалейчик Б.В., БГУ, Минск

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в локальной постановке:

$$u'(x) = f(x, u(x)),\ u(t) = y,\ t \le x \le t + \tau. \qquad (1)$$

Процесс последовательных приближений Пикара запишем в виде (см: [1], [2])

$$u^i(x) = y + \int_t^x f(z, u^{i-1}(z))dz,\ i = 1,2,\ldots \qquad (2)$$

Предположим, что нам известно начальное приближение $u^0(x)$. На отрез-