В случае если величины выплат имеют показательное распределение:

$$H(x)=\begin{cases}1-\alpha e^{-x}, & если\ x\geq 0,\\ (1-\alpha)e^{x}, & если\ x<0,\end{cases}$$

где $0<\alpha<1$.

Тогда при $c>0$ и $c+\lambda(1-2\alpha)>0$, для $x\geq 0$

$$W(x)=1-(1+\gamma_2)e^{\gamma_2 x}.$$

При $c<0$ и $c+\lambda(1-2\alpha)>0$ для $x\geq 0$.

$$W(x)=1-\frac{(1+\gamma_1)\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}e^{\gamma_1 x}-\frac{(1+\gamma_2)\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}e^{\gamma_2 x}$$

где $\gamma_1=\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+4c[c+\lambda(1-2\alpha)]}}{2c}$ и $\gamma_2=\dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+4c[c+\lambda(1-2\alpha)]}}{2c}$.

Литература. 1. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. - М.: Издательство «Мир», 1971. - 264 с.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Сидоревич М.П., БГТУ, г. Брест, Гучко И.М., БГУ, г. Минск

Следуя [1,2], будем называть продуктивную межотраслевую балансовую модель статической, если в ней все зависимости отнесены к одному моменту времени, т.е. все ее компоненты полагаются осредненными за некоторый временной промежуток. Такие модели характеризуют лишь состояние экономики на данный период времени и не позволяют установить взаимосвязь между предыдущими и последующими этапами развития экономики. К тому же в них капиталовложения вынесены из сферы производства и включены в конечный продукт, что не дает возможности проанализировать распределение, использование и производственную эффективность этих вложений. В динамических моделях капиталовложения выделяются из состава конечного продукта, исследуется их структура и влияние на рост объема производства. Принципиальная схема динамического баланса может быть представлена следующей таблицей:

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли													
	Межотраслевые потоки текущих затрат						Межотраслевые потоки капиталовложений						Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	…	j	…	n	1	2	…	j	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	$\Delta\Phi_{11}$	$\Delta\Phi_{12}$	…	$\Delta\Phi_{1j}$	…	$\Delta\Phi_{1n}$	y'_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	$\Delta\Phi_{21}$	$\Delta\Phi_{22}$	…	$\Delta\Phi_{2j}$	…	$\Delta\Phi_{2n}$	y'_2	x_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	$\Delta\Phi_{i1}$	$\Delta\Phi_{i2}$	…	$\Delta\Phi_{ij}$	…	$\Delta\Phi_{in}$	y'_i	x_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	$\Delta\Phi_{n1}$	$\Delta\Phi_{n2}$	…	$\Delta\Phi_{nj}$	…	$\Delta\Phi_{nn}$	y'_n	x_n

Здесь $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор валового выпуска, а $Y'=(y'_1, y'_2, ..., y'_n)$ – вектор конечного продукта динамической модели.

Так как сумма потоков капиталовложений и конечного продукта динамической модели равна конечной продукции статического баланса, т.е. $\sum_{j=1}^{n}\Delta\Phi_{ij}+y'_i=y_i$, $i=\overline{1,n}$, то распределение продукции вида $x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+y_i$, $i=\overline{1,n}$ по i-ой отрасли в динамическом балансе запишется следующим образом

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\Delta\Phi_{ij}+y'_i. \qquad (1)$$

Предположим, что капиталовложения обуславливают прирост продукции, причем прирост продукции текущего периода обусловлен вложениями, произведенными в этом же периоде. Следовательно, если текущий период обозначить через t, то прирост продукции □x_j равен разности абсолютных уровней производства в период t и в предшествующий (t-1)-й период: $\Delta x_j=x_j^{(t)}-x_j^{(t-1)}$.

Считаем также, что прирост продукции пропорционален приросту производственных фондов, т.е.

$$\Delta\Phi_{ij}=\varphi_{ij}\Delta x_j,\quad i=\overline{1,n}. \qquad (2)$$

Коэффициенты пропорциональности φ_{ij} называются коэффициентами вложений или коэффициентами приростной фондоемкости, а матрица Ф – матрицей коэффициентов приростной фондоемкости. Элемент φ_{ij} матрицы Ф показывает, какое количество продукции i-ой отрасли должно быть вложено в j-ую отрасль для увеличения ее производственной мощности на единицу. Значит j-й столбец матрицы Ф характеризует для j-ой отрасли величину и структуру фондов, необходимых для увеличения на единицу ее объема выпуска (производственной мощности). Предполагается, что производственные мощности используются полностью и прирост продукции равен приросту мощности.

Если учесть, что по Леонтьеву $x_{ij}=a_{ij}x_j$, где a_{ij} – технологические коэффициенты, то с учетом (2) система уравнений (1) примет вид

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}\Delta x_j + y_i', \quad i=\overline{1,n}. \tag{3}$$

Переходя от дискретных величин к непрерывным, из (3) получим динамическую модель баланса:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}\dot{x}_j + y_i', \quad i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

где $\dot{x}_j = dx_j/dt$.

Соотношения (4) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Будем исследовать систему (4) на устойчивость по Ляпунову, считая числовые матрицы $A=(a_{ij})$ и $Ф=(\varphi_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$ заданными и продуктивными, причем $A \geq 0$ и $Ф \geq 0$, $\det Ф \neq 0$. Запишем систему (4) в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}\dot{x}_j = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i', \quad i=\overline{1,n} \tag{5}$$

или

$$Ф \cdot X = (E-A)\cdot X - Y'. \tag{6}$$

Положим в (5)

$$z_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i', \quad i=\overline{1,n}. \tag{7}$$

В матричной форме система (7) запишется

$$(E-A)\cdot X = Z + Y', \tag{8}$$

где $Z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$. Так как матрица A продуктивна, то из (8) следует, что система (7) имеет единственное решение

$$X = (E-A)^{-1}\cdot(Z+Y'), \tag{9}$$

т.е.

$$x_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} A_{ji} z_j + \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} A_{ji} y'_j, \quad i=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Здесь Δ=det(E-A), A_{ij} – алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы E-A. Дифференцируя равенства (10), будем иметь

$$\dot{x}_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} A_{ji} \dot{z}_j, \quad i=\overline{1,n}. \tag{11}$$

Подставляя выражения для x_i и $\dot{x}_i$ из (10) и (11) соотвественно в равенства (5), получим систему, которая в матричной форме примет вид

$$\Phi(E-A)^{-1}\dot{Z} = Z. \tag{12}$$

По предположению матрица Ф продуктивна, значит она имеет единственную обратную матрицу Φ^{-1}. Следовательно, из (12) приходим к автономной системе дифференциальных уравнений

$$\dot{Z} = ((E-A)\cdot\Phi^{-1})Z. \tag{13}$$

Заметим следующее: из равенства (7) или (9) следует, что если движение устойчиво (неустойчиво) относительно переменного вектора Z, то оно будет устойчиво (неустойчиво) и относительно вектора X и наоборот.

Исследование системы (13) на устойчивость приведено, например, в [3,4]. В частности, если вещественные части всех корней характеристического уравнения системы (13) отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Если среди корней характеристического уравнения системы (13) имеется хотя бы один корень, вещественная часть которого положительна, то невозмущенное движение неустойчиво. Невозмущенное движение системы (13) будет устойчивым, но не асимптотически, в случае, если корням с нулевой вещественной частью отвечают простые элементарные делители; в противном случае движение будет неустойчивым. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ собственные значения матрицы $B=(E-A)\Phi^{-1}$. Тогда:

1) Если все собственные значения λ_i матрицы B имеют отрицательные ве-

щественные части, т.е. $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, $i=\overline{1,n}$, то точка покоя системы (13) асимптотически устойчива;

2) Если хотя бы один корень λ_k матрицы B имеет положительную вещественную часть, т.е. $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$, то точка покоя системы (13) неустойчива;

3) Если собственные значения с нулевой вещественной частью являются простыми, а остальные собственные значения, если они есть, имеют отрицательную вещественную часть, то точка покоя системы (13) устойчива по Ляпунову, но не асимптотически устойчива.

Литература. 1. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с. **2.** Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с. **3.** Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Мн.: Наука и техника, 1972. – 664 с. **4.** Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

О МЕРЕ ЗАВИСИМОСТИ СОСТАВЛЯЮЩИХ МНОГОМЕРНОГО УСТОЙЧИВОГО ПРОЦЕССА

Соболева Т. В., БГУ, Минск

Исследование свойств устойчивых процессов с характеристическим показателем α, $0<\alpha<2$, во временной области традиционными методами затруднено, так как у них существуют конечные моменты только порядка p, $0<p<\alpha$. Для таких процессов ковариационная функция не определена.

В данной работе вводится в рассмотрение мера зависимости между составляющими многомерного устойчивого процесса с дискретным временем в виде некоторой функции, называемой, аналогично [1], динамической функцией.

Рассмотрим r – мерный симметричный стационарный α - устойчивый случайный процесс $x^r(t)=\{x_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t\in Z=\{0,\pm1,...\}$, $r>1$ с независимыми приращениями.

В качестве функции, описывающей структуру зависимости составляющих $x_a(t)$, $t\in Z$, $a=\overline{1,r}$, процесса $x^r(t), t\in Z$, $r>1$, рассмотрим функцию $Rd_a(\tau)$, $\tau\in Z_+$, —которая имеет вид:

$$Rd_a(\tau)=E\exp\{i(x_a(t+\tau)-x_a(t))\}, \qquad (1)$$