Теорема 2. Для того, чтобы подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовал базис векторных полей $V=\{V_1,\ldots,V_n\}$ на D_o, такой, что $\overline{d\hat{f}(V_i)^*}=\overline{d\hat{g}(V_i)^*}$ и для любых соответствующих точек этих подмногообразий дифференциальные инварианты, найденные соответственно в базисах $d\hat{f}(V_i)^*$ и $d\hat{g}(V_i)^*$ совпадают.

Теорема 3. Эквивалентность относительно внутренних автоморфизмов группы H на множестве канонических лифтов n-мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H-эквивалентность соответствующих подмногообразий. Эквивалентность относительно присоединенной группы AdH на множестве всех канонических вложений n-мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H-эквивалентность соответствующих подмногообразий.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Кучмиенко И.А., БГУ, Минск

Рассмотрим начальную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$u'(x)=f(x,u(x)),\ u(t)=y,\ x\in[t,\ t+\tau],\ u\in G\subset R^n. \qquad (1)$$

При построении методов, численно решающих эту задачу, будем отталкиваться, как и в [1], от интегрального соотношения

$$u(t+\tau\beta)=y+\tau\int_0^\beta\varphi(\alpha)\,d\alpha,\ 0\le\beta\le1,\ \varphi(\alpha)=f(t+\alpha\tau,u(t+\alpha\tau)),\ \beta=\frac{x-t}{\tau}. \qquad (2)$$

Общая схема построения предлагаемых методов заключается в нахождении аналитического приближения правой части (2) по значениям $u(\alpha)$ лишь на конечном наборе точек α_k, $k=\overline{0,m}$, зависящем от параметра m, с последующим переходом от уравнения (2) к аппроксимирующей его системе нелинейных уравнений относительно значений $u(\alpha_k)$.

Рассмотрим два конкретных подхода к построению методов такого типа.

1. Проинтерполируем подынтегральное выражение $\varphi(\alpha)$ из (2) с помощью функций $q_k(\alpha)$, $k=\overline{0,m}$, по узлам α_i, $i=\overline{0,m}$. Интегрируя точно полученное интерполяционное представление, имеем желаемое аналитическое приближение интеграла в правой части (2):

$$u(t+\tau\beta)\approx y+\tau\sum_{k=0}^{m}c_k\int_0^{\beta}q_k(\alpha)\,d\alpha. \qquad (3)$$

Коэффициенты c_k находятся из условий

$$\varphi(\alpha_j)=\sum_{k=0}^{m}c_k\,q_k(\alpha_j), \quad j=\overline{0,m}.$$

Положив в выражении (3) последовательно $\beta=\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m$, будем иметь для приближенных значений $y_i\approx u(t+\alpha_i\tau)$ систему равенств

$$y_i=y+\tau\sum_{k=0}^{m}c_k\int_0^{\alpha_i}q_k(\alpha)\,d\alpha,\ i=\overline{0,m},\ f(t+\tau\alpha_j,y_j)=\sum_{k=0}^{m}c_k\,q_k(\alpha_j),\ j=\overline{0,m}.$$

Перепишем эти равенства с использованием обозначений

$$Y=\begin{bmatrix}y_0\\y_1\\\vdots\\y_m\end{bmatrix},\ Y_0=\begin{bmatrix}y\\y\\\vdots\\y\end{bmatrix},\ F(Y)=\begin{bmatrix}f(t+\alpha_0\tau,y_0)\\f(t+\alpha_1\tau,y_1)\\\vdots\\f(t+\alpha_m\tau,y_m)\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_m\end{bmatrix},$$

$$Q=\left[\int_0^{\alpha_i}q_k(\alpha)\,d\alpha\right]_{i,k},\quad R=\Big[q_k(\alpha_j)\Big]_{j,k}$$

(Q, R – квадратные матрицы размерности $(m+1)\times(m+1)$):

$$Y=Y_0+\tau QC,\ F(Y)=RC;$$

или (в случае невырожденности матрицы R)

$$Y=Y_0+\tau QR^{-1}F(Y).$$

Отметим, что квадратная матрица QR^{-1} не зависит от параметров исходной задачи (1) и определяется исключительно способом выбора функций $q_k(\alpha)$ и узлов α_i.

2. Разложим $\varphi(\alpha)$ из (2) в ряд Фурье по некоторой полной ортонормированной в $L^2[0,1]$ системе функций $e_j(\alpha)$, $j=0,1,\ldots$ и возьмем конечное число первых $p+1$ членов этого ряда, а коэффициенты разложения будем вычислять приближенно с помощью некоторого квадратурного правила с узлами α_k и весами A_k, $k=\overline{0,m}$. Получим следующее приближенное представление:

$$\varphi(\alpha)\approx\sum_{j=0}^{p}e_j(\alpha)\sum_{k=0}^{m}A_k\,e_j(\alpha_k)\,\varphi(\alpha_k). \qquad (4)$$

Используя в (2) вместо функции $\varphi(\alpha)$ её приближение (4), можно, как и в интерполяционном подходе, получить систему уравнений для приближений $y_i\approx u(t+\alpha_i\,\tau)$. Если же в интеграле из (2) предварительно провести замену переменной $\alpha=g(\xi)$, а затем аппроксимировать новое подынтегральное выражение с помощью описанного подхода, получим следующую систему для $y_i\approx u(t+\tau g(\alpha_i))$:

$$Y=Y_0+\tau E\;W\,F(Y),$$

$$E=\left[\int_0^{\alpha_i}e_j(\xi)\,d\xi\right]_{i,j},\quad W=\left[A_k\,e_j(\alpha_k)\,g'(\alpha_k)\right]_{j,k},\quad i=\overline{0,m},\ j=\overline{0,p},\ k=\overline{0,m}.$$

Приведем два примера систем такого вида. В обоих случаях $e_j(\alpha)=\sin j\pi\alpha$ и используется составная квадратурная формула трапеций, но во втором случае в интеграле производится, как и в [2], замена $\alpha=\sin^2\dfrac{\pi\xi}{2}$:

$$Y=Y_0+\tau\frac{2}{m}\left[\frac{2}{j\pi}\sin^2\frac{i\,j\,\pi}{2m}\right]_{i,j}\times\left[\sin\frac{j\,k\,\pi}{m}\right]_{j,k}F(Y),$$

$$y_i\approx u(t+\tau\frac{i}{m}),\ i=\overline{0,m},\ j=\overline{1,p},\ k=\overline{0,m};$$

$$Y=Y_0+\tau\frac{2}{m}\left[\frac{1}{j}\sin^2\frac{i\,j\,\pi}{2m}\right]_{i,j}\times\left[\sin\frac{j\,k\,\pi}{m}\sin\frac{k\,\pi}{m}\right]_{j,k}F(Y), \qquad (5)$$

$$y_i\approx u(t+\tau\sin^2\frac{\pi i}{2m}),\ i=\overline{0,m},\ j=\overline{1,p},\ k=\overline{0,m}.$$

Проиллюстрируем работу метода (5) для случая линейной системы с постоянной матрицей, крайние собственные значения которой равны -30 и -10^{-14}, используя следующую величину, характеризующую ошибку по каждой из компонент решения:

$$r_q = \frac{\max\limits_{i=1,m} |u^q(t+\tau\alpha_i) - y_i^q|}{\max|u^q(x)| - \min|u^q(x)|}, \quad x \in [0,1].$$

Укажем значения r_q для метода (5), а также для метода Рунге-Кутты 4-го порядка (РК4) с шагом дискретизации h:

	Метод (5)	РК4, $h = 1/16$	РК4, $h = 1/18$	РК4, $h = 1/20$
r_1 ($\lambda = -30$)	0.009	0.302	0.173	0.105
r_2 ($\lambda = -10^{-14}$)	0.000	0.067	0.200	0.333

Литература. 1. *Кучмиенко И. А.* К вопросу численной реализации метода последовательных приближений Пикара // Сборник статей VII Республиканской конференции студентов и аспирантов Беларуси "НИРС-2002". / УО "ВГТУ". - Витебск, 2002. С. 46-48. **2.** *Бобков В. В., Кучмиенко И. А., Фалейчик Б. В.* Дискретный аналог метода Пикара // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. №3. С. 68-71.

ЛОКАЛЬНЫЕ НАГРУЖЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Леоненко Д.В., БГУТ, г. Гомель

Трехслойные элементы в настоящее время широко используются в различных областях техники, таких, как судостроение, авиастроение, строительство. Поэтому возникает необходимость в разработке методов расчета этих конструкций.

Колебания трехслойных элементов, в том числе упругопластических, рассмотрены в работах [1 – 4]. Динамические нагружения упругого стержня сосредоточенной силой и моментом исследованы в [5]. Здесь рассматриваются малые поперечные колебания несимметричного по толщине упругого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем под действием локальных, импульсных и резонансных нагрузок.

Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Кирхгофа, в жёстком