Литература. 1. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. Москва, “Машиностроение”, 1987. 2. Шагинян А.С., Захаров А.В. Анализ динамики привода гидравлического питания вибрационных источников сейсмических волн.//Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-техн. навук.–1999.–№2.–С.109–114. 3. Льюис Э., Стерн Х.. Гидравлические системы управления. Москва, “МИР”, 1966. 4. Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника: справочное руководство. Пер. с нем.–М.:Мир, 1982.–512 с., ил.

ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПРОЦЕССА С БЕРНУЛЛИЕВСКИМИ ПРОПУСКАМИ НАБЛЮДЕНИЙ

Илюкевич Т. И., БГУ, Минск

Рассмотрим стационарный в широком смысле случайный процесс $X(t), t\in Z$ с математическим ожиданием $m^X=0$, ковариационной функцией $R^X(\tau)$, $\tau\in Z$ и спектральной плотностью $f^X(\lambda)$, $\lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$. Пусть в результате некоторого эксперимента получено T последовательных, через равные промежутки времени наблюдений

$$Y(0),Y(1),...,Y(T-1) \tag{1}$$

за процессом $Y(t), t\in Z$, который связан с процессом $X(t), t\in Z$ следующим образом:

$$Y(t)=X(t)d(t), \tag{2}$$

$t\in Z$, где $d(t)$, $t\in Z$ - бернуллиевская последовательность, для которой

$$d(t)=\begin{cases}1, \text{если в момент } t\ X(t) \text{ наблюдаем}\\ 0, \text{если в момент } t\ X(t) \text{ не наблюдаем}\end{cases} \tag{3}$$

причём $P\{d(t)=1\}=p>0, P\{d(t)=0\}=q, t\in Z,\ p+q=1.$

Предположим, что $d(t), t\in Z$ последовательность независимых случайных величин и $d(t), t\in Z$ не зависит от процесса $X(t), t\in Z$. Возникает задача по наблюдениям за процессом $Y(t)\ t\in Z$, построить оценку спектральной плотности процесса $X(t), t\in Z$ и исследовать её статистические свойства.

В качестве оценки спектральной плотности рассмотрим статистику

$$\hat{I}^T(\lambda)=\frac{1}{2\pi T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\frac{Y^2(t)}{p}+\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{\substack{s=0\\ s\neq t}}^{T-1}\frac{Y(t)Y(s)}{p^2}e^{-i\lambda(t-s)}\right], \lambda\in\Pi. \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть семиинвариантная спектральная плотность четвёртого порядка $f_4^X(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ непрерывна на Π^3 и спектральная плотность $f^X(\lambda)$ непрерывна на Π, тогда статистика $\hat{I}^T(\lambda)$, задаваемая равенством (4), является асимптотически несмещённой оценкой для $f^X(\lambda)$ и

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{I}^T(\lambda_1),\hat{I}^T(\lambda_2)\right\}\xrightarrow[T\to\infty]{}\begin{cases}0, & \lambda_1\pm\lambda_2\neq 0(\operatorname{mod}2\pi)\\ f^X(\lambda_1)f^X(\lambda_2), & \lambda_1\pm\lambda_2=0(\operatorname{mod}2\pi)\end{cases},\ \lambda_1,\lambda_2\in\Pi.$$

Доказательство. Найдём математическое ожидание $\hat{I}^T(\lambda)$. Имеем

$$M\hat{I}^T(\lambda)=\frac{1}{2\pi T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\frac{MX^2(t)Md^2(t)}{p}+\sum_{\substack{t=0\\ s\neq t}}^{T-1}\sum_{s=0}^{T-1}\frac{MX(t)X(s)Md(t)d(s)}{p^2}e^{-i\lambda(t-s)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{s=0}^{T-1}R^X(t-s)e^{-i\lambda(t-s)}\right]=\frac{1}{2\pi T}\int_\Pi f^X(z)\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{s=0}^{T-1}e^{i(t-s)(z-\lambda)}dz=\int_\Pi f^X(z+\lambda)\Phi_T(z)dz,$$

где $\Phi_T(z)$, $z\in\Pi$, - ядро Фейера. Учитывая непрерывность спектральной плотности и свойства ядра Фейера, получим требуемое.

Докажем второе соотношение, используя определение ковариации, свойства математического ожидания, определение смешанных моментов четвёртого и второго порядков и связывающие соотношения между смешанными моментами и смешанными семиинвариантами.

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{I}^T(\lambda_1),\hat{I}^T(\lambda_2)\right\}=M\,\overline{\hat{I}^T(\lambda_1)\hat{I}^T(\lambda_2)}-M\,\hat{I}^T(\lambda_1)M\,\overline{\hat{I}^T(\lambda_2)}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi T)^2}\left[\sum_{t,s=0}^{T-1}\sum_{j,k=0}^{T-1}MX(t)X(s)X(j)X(k)e^{-i\lambda_1(t-s)+i\lambda_2(j-k)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{t,s=0}^{T-1}\sum_{j,k=0}^{T-1}MX(t)X(s)MX(j)X(k)e^{-i\lambda_1(t-s)+i\lambda_2(j-k)}\right]=$$

$$=\frac{1}{(2\pi T)^2}\left[\sum_{t,s=0}^{T-1}\sum_{j,k=0}^{T-1}m_4^X(t,s,j,k)e^{-i\lambda_1(t-s)}e^{i\lambda_2(j-k)}-\sum_{t,s=0}^{T-1}R^X(t-s)e^{-i\lambda_1(t-s)}\sum_{j,k=0}^{T-1}R^X(j-k)e^{i\lambda_2(j-k)}\right]=$$

$$=\frac{1}{(2\pi T)^2}\left[\sum_{t,s=0}^{T-1}\sum_{j,k=0}^{T-1}\left(c_4^X(t-k,s-k,j-k)+R^X(t-j)R^X(s-k)+R^X(t-k)R^X(s-j)\right)e^{-i\lambda_1(t-s)}e^{i\lambda_2(j-k)}\right]$$

Подставляя вместо ковариационной функции и смешанного семиинварианта их выражения через спектральную плотность и семиинвариантную спектральную плотность четвёртого порядка и используя представление функции $\Phi_T(y_1,...,y_n)$, $n=2,3,...$ [2, стр. 86] получим

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{I}^{T}(\lambda_1), \hat{I}^{T}(\lambda_2)\right\} = \frac{2\pi}{T}\iiint_{\Pi^3} f_4^X(y_1+\lambda_1, y_2-\lambda_1, y_3-\lambda_2)\Phi_T(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3 +$$

$$+\int_{\Pi} f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_1; x_1-\lambda_2)dx_1 \int_{\Pi} f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_1; x_2+\lambda_2)dx_2 +$$

$$+\int_{\Pi} f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_1; x_1+\lambda_2)dx_1 \int_{\Pi} f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_1; x_2-\lambda_2)dx_2 .$$

Рассмотрим предел при $T\to\infty$, учитывая непрерывность $f_4^X(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ на Π^3 и $f^X(\lambda)$ на Π.

$$\frac{2\pi}{T}\iiint_{\Pi^3} f_4^X(y_1+\lambda_1, y_2-\lambda_1, y_3-\lambda_2)\Phi_T(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 .$$

$$\int_{\Pi} f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_1; x_1-\lambda_2)dx_1 \int_{\Pi} f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_1; x_2+\lambda_2)dx_2 \xrightarrow[T\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{} \begin{cases} 0, & \lambda_1-\lambda_2 \neq 0(\operatorname{mod} 2\pi) \\ f^X(\lambda_1)f^X(\lambda_2), & \lambda_1-\lambda_2 = 0(\operatorname{mod} 2\pi) \end{cases}$$

$$\int_{\Pi} f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_1; x_1+\lambda_2)dx_1 \int_{\Pi} f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_1; x_2-\lambda_2)dx_2 \xrightarrow[T\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{} \begin{cases} 0, & \lambda_1+\lambda_2 \neq 0(\operatorname{mod} 2\pi) \\ f^X(\lambda_1)f^X(\lambda_2), & \lambda_1+\lambda_2 = 0(\operatorname{mod} 2\pi) \end{cases}$$

Теорема доказана.

Таким образом, построенная оценка взаимной спектральной плотности не состоятельная. Для состоятельности оценки, сгладим её спектральными окнами ([2], стр.72).

$$\hat{f}^{T}(\lambda_s) = \sum_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \varphi^T(k)\hat{I}^{T}(\lambda_{s+k}), \quad \lambda_s = \frac{2\pi s}{T}, \quad -\left[\frac{T}{2}\right]+1 \le s \le \left[\frac{T}{2}\right]. \qquad (5)$$

<u>Теорема 2</u>. Если семиинвариантная спектральная плотность четвёртого

порядка $f_4^X(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ непрерывна на Π^3, спектральная плотность $f^X(\lambda)$ непрерывна на Π и $\sum_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \left[\varphi^T(k)\right]^2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$, то статистика $\hat{f}^T(\lambda_s)$, задаваемая равенством (5) является состоятельной в среднеквадратическом смысле.

<u>**Доказательство.**</u> Найдём дисперсию оценки $\hat{f}^T(\lambda_s)$.

$$D\hat{f}^T(\lambda_s) = \sum_{k_1=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \sum_{k_2=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \varphi^T(k_1)\varphi^T(k_2)\operatorname{cov}\left\{\hat{I}^T(\lambda_{s+k_1}), \hat{I}^T(\lambda_{s+k_2})\right\}.$$

Если $k_1 \neq k_2$, то $D\hat{f}^T(\lambda_s) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$ по теореме 1.

Если $k_1 = k_2$, то $D\hat{f}^T(\lambda_s) = \sum_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \left[\varphi^T(k)\right]^2 \times$

$$\times\left[\frac{2\pi}{T}\iiint_{\Pi^3} f_4^X(y_1+\lambda_{s+k}, y_2-\lambda_{s+k}, y_3-\lambda_{s+k})\Phi_T(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3 + \right.$$

$$+\int_\Pi f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_{s+k}; x_1-\lambda_{s+k})dx_1 \int_\Pi f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_{s+k}; x_2+\lambda_{s+k})dx_2 +$$

$$\left.+\int_\Pi f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_{s+k}; x_1+\lambda_{s+k})dx_1 \int_\Pi f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_{s+k}; x_2-\lambda_{s+k})dx_2\right].$$

Из условия теоремы следует, что $D\hat{f}^T(\lambda_s) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$. Теорема доказана.

Литература. 1. Hideaki Sakai, Takashi Soeda and Hidekatsu Tokumaru. «On the relation between fitting autoregression and periodogram with application.», The Annals of Statistics, 1979, Vol.7, No 1, 96-107. **2.** Труш Н. Н. «Асимптотические методы статистического анализа временых рядов», Мн.:БГУ, 1999.

АППРОКСИМАЦИЯ УСЛОВНОЙ ПЛОТНОСТИ ДВУХФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ БЕЗРИСКОВОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Казанцева О.Г., БГУ, г. Минск

В работе предложена аппроксимация условной плотности вероятностей двумерного процесса, используемого в двухфакторной модели безрисковой процентной ставки.