В настоящей работе рассматривается модификация уравнения ФКПП, связанная с учетом влияния пространственной неоднородности в системе на скорость роста функции. Запишем модифицированное уравнение ФКПП в следующем виде

$$u_t - u_{xx} - u + u^2 - u_x u = 0. \quad (2)$$

Для решения уравнения (2) применим прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных [7]. В результате получим решение вида

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{kx - \omega t + \eta^0}{2}\right)\right]. \quad (3)$$

Данное решение соответствует топологически нетривиальному состоянию типа одиночного кинка в системе, описываемой уравнением ФКПП. Здесь k и ω – параметры решения. Параметр η^0 характеризует начальное положение кинка. Без потери общности его можно положить равным нулю. Дисперсионное соотношение для решения (3) записывается следующим образом

$$\omega = -k^2 - 1$$

Вычисления показывают, что параметры решения k и ω в данном случае могут принимать только строго фиксированные значения $k = 1/2$, $\omega = -5/4$.

Подобно модифицированному уравнению ФКПП, рассмотренному в работе [5], в результате модификации в виде (2) снова получено решение, которое содержит только вклад от составляющей в виде кинка. Солитонная составляющая отсутствует. Таким образом, модификация уравнения ФКПП в работе [5] и уравнение (2) приводят к одинаковому эффекту, а именно, возможности формирования в среде доменной структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов, А. А. Уравнение «реакция-диффузия»: учебное пособие / А. А. Пухов. – М. : МФТИ, 2014. – 74 с.

2. Левченко, Е. А. Асимптотические решения нелокального уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова на больших временах / Е. А. Левченко, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5, № 4. – С. 543–558.

3. Yirui Yang. Solitary wave solutions of FKPP equation using Homogeneous balance method (HBB method) // Yirui Yang, Wei Kou, Xiaopeng Wang, Xurong Chen // e-Print arxive, arXiv.org/pdf/2009.11378 [nlin.PS].

4. Волосов, К. А. Новые точные решения уравнений с частными производными параболического типа: учебное пособие / К. А. Волосов, Е. К. Вдовина, А. К. Волосова. – М. : МИИТ, 2010. – 134 с.

5. Блинкова, Н. Г. Решение типа кинка модифицированного уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова / Н. Г. Блинкова, М. А. Князев // Приборостроение – 2020 : Материалы XIII Междунар. научно-техн. конф., 18–20 нояб. 2020 г. – Минск : БНТУ, 2020. – С. 235–236.

6. Алешин, С. В. Уравнение Колмогорова–Перовского–Пискунова с запаздыванием / С. В. Алешин, С. Д. Глызин, С. А. Кащенко // Моделирование и анализ информационных систем. – 2015. – Т. 22, № 2. – С. 304–321.

7. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловиц, Х. Сегур. – М. : Мир, 1987. – 479 с.

Е. В. КУЗЬМИНА
УО БрГТУ (г. Брест, Беларусь)

О СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЙ АППРОКСИМИРУЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим в пространстве распределений семейство уравнений с обобщенными коэффициентами вида

$$u' + s\left(P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta\right)u = 0, \quad (1)$$

где s – натуральное число, M – произвольная комплексная постоянная, $P\left(\frac{1}{x}\right)$ – обобщенная функция, заданная выражением

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int \frac{1}{x} \varphi(x) dx,$$

в котором интеграл понимается в смысле главного значении по Коши [1].

Заменим обобщенный коэффициент $q = s\left(P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta\right)$ на его аппроксимацию гладкими функциями q_ε и рассмотрим семейство уравнений

$$u_\varepsilon'(x) + q_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) = 0. \tag{2}$$

Пусть $u_\varepsilon(x)$ – решение задачи Коши с условием $u_\varepsilon(-1) = (-1)^s$ для (2).

Если семейство функций $u_\varepsilon(x)$ сходится в пространстве распределений, то его предел U будем называть *обобщенным решением задачи Коши для уравнения* (1) *при заданном способе аппроксимации* [2].

Решения аппроксимирующих уравнений (2) при

$$q_\varepsilon(x) = \lambda \frac{s}{x + i\varepsilon} + (1-\lambda) \frac{s}{x - i\varepsilon}, \tag{3}$$

где $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{M}{2\pi i}$, $M = i\pi(1-2\lambda)$, представляются в виде

$$u_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \frac{1}{(x - i\varepsilon)^s} \left(\frac{x - i\varepsilon}{x + i\varepsilon}\right)^{\lambda s},$$

где $C_\varepsilon = (1+i\varepsilon)^s \left(\frac{-1+i\varepsilon}{-1-i\varepsilon}\right)^{\lambda s}$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon \neq 0.$ При $x \neq 0$ семейство $u_\varepsilon(x)$ точечно сходится к формальному решению

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^s}, & x < 0; \\ \dfrac{(-1)^s \cdot e^{-sM}}{x^s}, & x > 0. \end{cases}$$

В работе [3] доказано, что при аппроксимации (3) обобщённое решение уравнения (1), где $M = i\pi\left(1 - \frac{2m}{s}\right)$, при целых $m = \lambda s$ существует, если $m \geq s$ или $m \leq 0$, и не существует, если $0 < m < s$. При других значениях λ и s возникают более сложные случаи, которые не исследованы в [3].

Теорема. *При аппроксимации* (3) *коэффициента* $q = s\left(P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta\right)$ *обобщённое решение задачи Коши для дифференциального уравнения* (1) *не существует, когда* $M = i\pi\left(1 - \frac{2m}{s}\right)$, *где* $m = \lambda s$ *нецелое число.*

Доказательство. Приведем доказательство для тех конкретных значений s и λ, для которых это наиболее просто и наглядно.

Ограничимся случаем $s = 1$. Существует такая основная функция φ, что $\varphi(x) = 1$ при $|x| < h$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 2h$. Для этой функции получаем

$$\int\limits_{|x|\leq 2h} u_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon),$$

где

$$I_1(\varepsilon) = C_\varepsilon \int\limits_{|x|\leq h} \frac{1}{x - i\varepsilon} \left(\frac{x - i\varepsilon}{x + i\varepsilon}\right)^{\lambda} dx, \quad I_2(\varepsilon) = \int\limits_{h\leq|x|\leq 2h} u_\varepsilon(x) \varphi(x) dx.$$

При $h \le |x| \le 2h$ сходимость равномерная, поэтому существует конечный предел у $I_2(\varepsilon)$. Рассмотрим более подробно $I_1(\varepsilon)$.

При $\lambda = \frac{1}{2}$ (соответствует $M = 0$) имеем

$$I_1(\varepsilon) = C_\varepsilon \int\limits_{|x| \le h} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}} dx.$$

Здесь семейство функций $\frac{1}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}$ монотонно возрастает при $\varepsilon \to 0$ и почти всюду сходится к неинтегрируемой функции $\frac{1}{|x|}$. Поэтому, согласно теореме Б. Леви, интегралы $\int\limits_{|x|\le h} \frac{1}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}} dx$ стремятся к бесконечности, т.е. у них нет конечного предела. Эти интегралы растут как $2\ln\frac{1}{\varepsilon}$:

$$\int\limits_{|x|\le h} \frac{1}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}} dx = \ln\left(h + \sqrt{h^2+\varepsilon^2}\right) - \ln\left(\sqrt{h^2+\varepsilon^2} - h\right) = \ln \frac{\sqrt{h^2+\varepsilon^2}+h}{\sqrt{h^2+\varepsilon^2}+h} =$$

$$= 2\ln\left(\sqrt{h^2+\varepsilon^2}+h\right) + 2\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Числовой множитель C_ε не влияет на сходимость и расходимость $u_\varepsilon(x)$ в пространстве распределений. Следовательно, при $\varepsilon \to 0$ интегралы $I_1(\varepsilon)$ не имеют конечного предела.

При $\lambda = \frac{3}{2}$ (соответствует $M = -2\pi i$) имеем

$$I_1(\varepsilon) = C_\varepsilon \int\limits_{|x|\le h} \frac{1}{x - i\varepsilon}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} dx = C_\varepsilon \int\limits_{|x|\le h} \frac{(x-i\varepsilon)^2}{\left(x^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Рассмотрим

$$\int\limits_{|x|\le h} \frac{(x-i\varepsilon)^2}{\left(x^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx = \int\limits_{|x|\le h} \frac{x^2-\varepsilon^2}{\left(x^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx - i2\varepsilon \int\limits_{|x|\le h} \frac{x}{\left(x^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx =$$

$$= \int\limits_{|x|\le h} \frac{1}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}} dx - \int\limits_{|x|\le h} \frac{2\varepsilon^2}{\left(x^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx - i2\varepsilon \int\limits_{|x|\le h} \frac{x}{\left(x^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Здесь первый интеграл растет как $2\ln\frac{1}{\varepsilon}$, второй интеграл имеет конечный предел, а третий интеграл равен нулю. Следовательно, интегралы $I_1(\varepsilon)$ стремятся к бесконечности.

Аналогично можно исследовать интегралы $\int\limits_{|x|\le 2h} u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx$ при других натуральных S и нецелых λ, что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.

2. Антоневич, А. Б. Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом / А. Б. Антоневич, Т. Г. Шагова // Таврический Вестник Информатики и Математики, 2019. – № 3. – С. 23–36.

3. Антоневич, А. Б. Решения дифференциального уравнения $u' + \frac{s}{x}u = 0$ в пространстве распределений / А. Б. Антоневич, Е. В. Кузьмина // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 2. – С. 56–66.