

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.544.8+517.965

МАКАРУК СВЕТЛАНА ФЕДОРОВНА

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ
ОБЛАСТЯХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО ДИЗАЙНА КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛОВ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 2004

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научные руководители — кандидат физико-математических наук,
доцент **Рогозин Сергей Васильевич**,
Белорусский государственный университет,
кафедра теории функций

— доктор технических наук, кандидат физико-
математических наук, профессор

Митюшев Владимир Викторович,
Поморская педагогическая академия (Слупск,
Польша), кафедра прикладной математики

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Журавков Михаил Анатольевич, Белорусский
государственный университет, кафедра теоретической
и прикладной механики

кандидат физико-математических наук, доцент
Хвопчинская Людмила Аркадьевна, Белорусский
государственный аграрно-технический университет,
кафедра высшей математики

Оппонирующая организация:

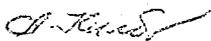
Чувалский государственный университет

Защита состоится 28 мая 2004 г. в 10:00 часов на заседании совета по за-
щите диссертаций Д 02.01.07 в Белорусском государственном университете
по адресу: 220050, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 4, главный корпус, к. 206,
тел. ученого секретаря — 209-55-58.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского госу-
дарственного университета

Автореферат разослан "8" мая 2004 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций
профессор



А. А. Килбас

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Диссертация посвящена конструктивному анализу задач оптимального дизайна композиционных материалов. С точки зрения постановки задач она примыкает к исследованиям таких авторов как П. Адлер (P. Adler), В. В. Митюшев (V. V. Mityushèv), К. А. Лурье (K. A. Lurie), А. В. Черкаев (A. V. Cherkaev), Дж. Бутazzo (G. Buttazzo), Я. А. Колодзей (J. A. Kolodzej), Д. Дж. Бергман (D. J. Bergmann), В. Л. Бердичевский, Е. И. Григолюк, Л. А. Фильшттинский и др. При изучении свойств композиционных материалов их основные характеристики описываются в терминах решений краевых задач в тех или иных классах функций (например, в случае потенциальных полей - в классах гармонических функций). Одним из мощных методов исследования различных вопросов теории композиционных материалов являются краевые задачи для аналитических функций. Данный подход успешно применяется в задачах для композиционных материалов В. В. Митюшевым, Г. П. Черепановым, Ю. В. Обносовым, В. В. Сильвестровым, Л. Берляндом (L. Berlyand), Р. К. МакФедраном (R. C. McPhedran), Дж. У. Милтоном (G. W. Milton) и др.

Оказывается, что для композиционных материалов с большим числом включений их характеристики существенным образом зависят от структуры и взаимного расположения этих включений. Задачи, в которых определяется оптимальная (с точки зрения максимальных или минимальных значений тех или иных характеристик) структура композиционного материала, относятся к классу задач оптимального дизайна. Исследованию таких задач посвящены многие работы последнего времени (см., например, работы К. А. Лурье (K. A. Lurie), А. В. Черкаева (A. V. Cherkaev), Я. Соколовски (J. Sokolowski), Я. П. Золезио (J. P. Zolesio)).

Среди работ этого направления выделяются так называемые конструктивные исследования эффективных свойств композиционных материалов. Эти исследования позволяют дать либо явное представление эффективных характеристик композиционных материалов, либо получить приближенные формулы для этих характеристик с любой степенью точности. С точки зрения приложений такие работы чрезвычайно важны для изучения конкретных типов композиционных материалов. Однако, следует отметить, что получение подобных результатов существенно зависит от разработки методов решения соответствующих краевых задач. В частности, в случае

двумерных композиционных материалов необходимо проводить глубокое исследование краевых задач для гармонических или аналитических функций. К сожалению, не все из возникающих при этом задач допускают явное решение. Известно лишь ограниченное число работ, в которых получены явные формулы для эффективных характеристик композиционных материалов. Поэтому актуальной представляется задача дальнейшего развития методов решения краевых задач для гармонических и аналитических функций и их применения для конструктивного анализа эффективных свойств композиционных материалов.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Исследования проводились на кафедре теории функций Белорусского государственного университета в рамках программы фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь Ф 00-205 "Нелинейные краевые задачи и нелинейные сингулярные интегральные уравнения и их приложения", а также госбюджетной научной темы министерства образования Республики Беларусь "Методы действительного и комплексного анализа в теории интегральных и дифференциальных преобразований и их приложения" (НИР ВГУ № 883/25, № госрегистрации 20011617).

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является конструктивное описание решения задачи оптимизации функционала эффективной проводимости двумерных композиционных материалов с круговыми включениями на множестве решений смешанных краевых задач для соответствующих потенциалов.

Для достижения поставленной цели необходимо:

- исследовать разрешимость смешанных краевых задач для аналитических функций в случае многосвязных областей и получить их явное решение в специальных случаях;
- получить явное представление функционала эффективной проводимости (его изменяющейся части) и указать условия его оптимальности;
- дать описание оптимальной конфигурации включений в случае неограниченного и ограниченного композиционного материала.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования является задача оптимизации функционала эффективной проводимости на множестве решений смешанных краевых задач для аналитических функций в случае ограниченных и неограниченных многосвязных областей.

Предметом исследования является описание оптимальной структуры двумерных композиционных материалов с конечным числом цилиндрических включений.

Методология и методы проведенного исследования. При решении поставленных задач используются методы краевых задач теории аналитических функций, методы функциональных уравнений в комплексной области, а также методы оптимизации нелинейных функционалов.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Научная новизна работы заключается в следующем:

- получено решение смешанных краевых задач для аналитических функций на основе их сведения к функциональным уравнениям в комплексной области;

- установлено представление функционала эффективной проводимости на множестве решений краевых задач для неограниченной многосвязной области;

- установлено представление функционала эффективной проводимости на множестве решений краевых задач для ограниченной многосвязной области;

- получено геометрическое описание оптимальной конфигурации композиционных материалов в случае простейших внешних полей.

Практическая (экономическая, социальная) значимость полученных результатов. Работа носит теоретический характер и вносит вклад в развитие теории краевых задач для гармонических и аналитических функций, а также в решение задач оптимального дизайна композиционных материалов.

Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях эффективных свойств композиционных материалов.

Результаты могут быть также использованы при конструировании композиционных материалов с оптимальным размещением включений заданной формы и размеров.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Исследование разрешимости смешанных краевых задач для аналитических функций в случае многосвязных областей и их решение в замкнутой форме в специальных случаях.

2. Представление функционала эффективной проводимости для композиционного материала с n включениями в случае простейшего внешнего

потока для ограниченного и неограниченного композиционного материала.

3. Исследование задачи оптимизации функционала эффективной проводимости на множестве решений смешанных краевых задач в случае малого параметра Бергмана.

4. Геометрическое описание оптимальной конфигурации композиционных материалов в случае простейших внешних полей.

5. Построение новой математической модели, описывающей композиционные материалы с экстремальными эффективными свойствами.

Личный вклад соискателя. Все изложенные в диссертации основные результаты получены соискателем самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались:

— на международной математической конференции AMADE 2001 (Минск, 15-19 февраля 2001 г.);

— на IV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов (Гомель, 19-22 марта 2001 г.);

— на международной математической конференции AMADE 2003 (Минск, 4-9 сентября 2003 г.);

— Минском городском семинаре по краевым задачам имени академика Ф. Д. Гахова (руководители - проф. Э. И. Зверович, А. А. Килбас, В. Г. Кротов).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 научных работах. Среди них четыре статьи в рецензируемых научных журналах и двое тезисов докладов на международных и республиканских конференциях.

Все работы опубликованы без соавторов. Общее количество страниц опубликованных материалов - 19.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и списка использованных источников, насчитывающих 97 наименований. Общий объем диссертации - 73 страницы, из которых три страницы занимают 7 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Во **введении** даётся краткая характеристика работы, её цели и задачи, описываются основные направления исследования и характеризуются результаты, полученные в диссертационной работе.

В первой главе приводится краткий обзор исторических сведений по вопросам, связанным с тематикой диссертаций. Обсуждается связь теории оптимального управления с задачами теории композиционных материалов и дано описание конструктивного подхода к решению смешанных краевых задач.

Вторая глава посвящена анализу конструктивных методов исследования задач оптимального дизайна композиционных материалов. В разделе 2.1 содержатся вспомогательные сведения из теории композиционных материалов.

В разделе 2.2 приводятся математические задачи, возникающие при исследовании проводящих свойств композиционных материалов с цилиндрическими включениями.

Рассматриваются два основных типа задач.

Первый тип задач. Ограниченный композиционный материал.

Дана ограниченная область Q на плоскости, такая что $\Gamma = \partial Q$ есть простая кусочно-гладкая замкнутая кривая Ляпунова. Требуется найти кусочно-гладкую кривую L , состоящую из конечного числа связных компонент $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$, $L \subset \overline{\text{int}\Gamma}$ (Γ и L_k имеют попарно не более, чем конечное число общих точек), и кусочно-гармоническую функцию u , удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u(z) = 0, z \in D^+ \cup D_k, \quad (1)$$

в областях $D_k = \text{int}L_k$, $D^+ = Q \setminus \overline{\text{int} \bigcup_{k=1}^n L_k}$, а также краевым условиям на L

$$u^+(t) = u^-(t), \lambda_m \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda_i \frac{\partial u^-}{\partial n}(t), t \in L = \bigcup_{k=1}^n L_k, \quad (2)$$

или

$$u^+(t) - u^-(t) = g(t), \lambda_m \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda_i \frac{\partial u^-}{\partial n}(t), t \in L, \quad (3)$$

где $g(t)$ - заданная на L непрерывная функция и одному из условий

$$\frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = 0, t \in \Gamma, \quad (4)$$

$$u^+(t) = h(t), t \in \Gamma, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = q(t), t \in \Gamma, \quad (6)$$

на Γ , таких, что коэффициент λ_e эффективной проводимости принимает минимальное или максимальное значение.

Второй тип задач. Неограниченный композиционный материал.

В этом случае $Q = \mathbb{C}$, то есть внешняя граница Γ отсутствует. Тогда внешний поток исходит из бесконечности, т.е. задана некоторая аналитическая в \mathbb{C} функция $f(z)$, имеющая особенность аналитического характера на бесконечности. Задача состоит в определении кусочно-гладкой кривой L , состоящей из конечного числа связных компонент $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$, имеющих попарно не более чем конечное число общих точек, а также потенциала u , удовлетворяющую уравнению Лапласа в областях D_k и $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{D_k}$, имеющего особенность заданного типа на бесконечности и удовлетворяющего краевым условиям (2) (или (3)) на L , таких, что коэффициент λ_e эффективной проводимости принимает минимальное или максимальное значение.

В работе показано, что в рассматриваемой задаче потенциал u носит вспомогательный характер. В частности, изменяющаяся часть коэффициента эффективной проводимости выражена в терминах решений соответствующих краевых задач.

Приведенные выше постановки носят функционально - геометрический характер. Однако, если форма и размеры кривых L_k фиксированы, то эти задачи переформулированы в чисто геометрических терминах. В частности, если кривые L_k являются окружностями фиксированного радиуса, то обе задачи сводены к нахождению центров этих окружностей. Изменяющаяся часть коэффициента эффективной проводимости также выражена через эти центры.

В разделе 2.3 описывается метод функциональных уравнений в задачах для композиционных материалов, приводятся основные понятия и факты, связанные с этим методом.

В разделе 2.4 устанавливается связь задачи описания проводящих свойств композиционных материалов с задачами оптимального дизайна. В этом разделе получено аналитическое выражение для функционала эффективной проводимости. Сформулированы следующие задачи оптимального дизайна композиционного материала (для ограниченного и неограниченного композиционного материала, соответственно):

Задача А. Пусть Q заданная область в \mathbb{C} , $h(t)$ - заданная непрерывная функция на $\Gamma = \partial Q$, и фиксированная константа ρ удовлетворяет нера-

венству $|\rho| < 1$. Пусть n кругов D_k , $k = 1, 2, \dots, n$, фиксированного радиуса r расположены в области Q . Пусть $g(t)$, $t \in L_k = \partial D_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ - заданные кусочно-непрерывные функции. Обозначим через $\varphi(z)$ и $\varphi_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) аналитические функции, удовлетворяющие краевым условиям

$$\varphi(t) = \varphi_k(t) - \overline{\rho \varphi_k(t)} + g(t), \quad |t - a_k| = r, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

$$\operatorname{Re} \varphi(t) = h(t), \quad t \in \Gamma. \quad (8)$$

Требуется найти такое расположение кругов D_k , при котором функционал λ_e

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_m} = 1 + \frac{2\rho\nu}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \psi_k(a_k) \quad (9)$$

достигет максимального (минимального) значения, где $\psi_k(z) = \varphi'_k(z)$, ν - положительное число, λ_m - проводимость матрицы.

Следует заметить, что второе краевое условие в Задаче А можно всегда считать однородным в силу возможной замены неизвестной функции $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(z) - f(z)$, где $f(z)$ - решение вспомогательной задачи Шварца $\operatorname{Re} f(t) = h(t)$, $t \in \Gamma$.

В приведенной формулировке Задачи А круги D_k должны быть взаимно непересекающимися, но возможно касание кругов между собой, а также их касание границы Q .

Если граница области Q расположена далеко от всех включений, то этот случай моделируется устремлением Γ к бесконечности. Тогда, вместо граничного условия на Γ предполагается, что внешний поток определяется заданной функцией $f(z)$, имеющей особенность на бесконечности. В этом случае также оптимизируется функционал, задаваемый формулой (9).

Задача В. Пусть ν заданное положительное число, $f(z)$ заданная аналитическая функция в \mathbb{C} , имеющая особенность аналитического типа на бесконечности, и ρ - фиксированная константа, удовлетворяющая неравенству $|\rho| < 1$. Пусть n кругов D_k фиксированного радиуса r расположены в области Q . Пусть также граничные значения функций $\psi(z)$ и $\psi_k(z)$ удовлетворяют краевым условиям

$$\psi(t) = \psi_k(t) + \rho \left(\frac{r}{t - a_k} \right)^2 \overline{\psi_k(t)} - f'(t), \quad |t - a_k| = r, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

где $\psi_k(t)$ - функция аналитическая в D_k , $\psi(z)$ - функция аналитическая в дополнении всех D_k до расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ и $\psi(\infty) = 0$.

Требуется найти такие расположения кругов, при которых функция λ_e

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_m} = 1 + \frac{2\rho\nu}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \psi_k(a_k), \quad (11)$$

достигает максимального (минимального) значения.

В третьей главе исследуется задача оптимального дизайна ограниченного композиционного материала в случае малого параметра Бергмана ($|\rho| \ll 1$). Приведем точную постановку задачи. Дана область Q , ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ . Эта область разбивается на две части $D^- := \operatorname{int} L$ и $D^+ := \operatorname{ext} L \cap \operatorname{int} \Gamma$ некоторой неизвестной кривой L . Предположим, что D^- состоит из конечного числа непересекающихся компонент, а L - из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова. Пусть $f \in C^{1,\lambda}(\Gamma)$, $g \in C^{1,\lambda}(\bar{Q})$ - заданные достаточно гладкие функции. Требуется найти кривую L и (кусочно-) аналитическую функцию $\varphi(z)$, непрерывную в замыкании соответствующих областей, при условии, что предельные значения $\varphi(z)$ на Γ и L соответственно удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{Re} \varphi(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (12)$$

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = g(t), \quad t \in L, \quad (13)$$

а функционал эффективной проводимости

$$\sigma := \int_L \operatorname{Re} \varphi^-(t) dy, \quad t = x + iy, \quad (14)$$

принимает максимальное (или минимальное) значение в предположении, что площадь области D^- фиксирована.

В работе построена общая схема решения задачи в случае одного или конечного числа включений фиксированной формы. Другими словами, рассмотрена задача оптимального расположения включений, а более сложная задача об оптимальной форме остается для дальнейшего исследования. Кроме того, в работе получено решение указанной задачи в замкнутой форме для важного с точки зрения приложений случая, когда $g(t) = \bar{t}$.

В случае одного кругового включения разрешимость задачи сведена к исследованию возможности достижения максимального и минимально-

го значения функции $F(\xi, \eta) := \operatorname{Re} \varphi'(\xi + i\eta)$, $a := \xi + i\eta$, на замкнутом круге $K := \{(\xi, \eta) : \xi^2 + \eta^2 \leq (1-r)^2\} \subset \mathbb{C}$. Существование экстремума является следствием теоремы Вейерштрасса и условий на известные функции f, g . При этом решение задачи единственно с точностью до вращения единичного круга относительно его центра.

В случае n круговых включений получено представление изменяющейся компоненты функционала эффективной проводимости в виде

$$\sigma = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left[\sum_{m=1}^n \frac{1}{(1 - \overline{a_m} a_k)^2} + \sum_{m \neq k} \frac{1}{(a_k - a_m)^2} \right]$$

Исследуя данную функцию $2n$ действительных переменных на экстремум на компактном множестве $|a_j| \leq 1-r$, $|a_i - a_j| \geq 2r$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$, получаем общее утверждение о разрешимости рассматриваемой задачи. В частных случаях получены точные значения минимума и максимума функционала σ и указано оптимальное расположение включений.

Четвертая глава посвящена оптимальному дизайну неограниченного композиционного материала. Рассмотрены: случай малого параметра Бергмана ($|\rho| \ll 1$), когда задача на границе включений сводится к задаче о скачке и случай $|\rho| < 1$, когда на границе включений рассматривается общее краевое условие задачи R -линейного сопряжения.

В разделе 4.1 в случае малого параметра Бергмана рассмотрена задача оптимального (с точки зрения значений функционала эффективной проводимости) размещения взаимно непересекающихся круговых включений $D_k := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_k| < r\}$, $k = 1, \dots, n$, одинакового радиуса на плоскости. При этом, установлены условия разрешимости задачи

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = g(t), \quad t \in L, \quad (15)$$

$$\sigma := \int_L \operatorname{Re} \varphi^-(t) dy \rightarrow \max(\min), \quad (16)$$

где $t = x + iy$.

В данном случае $\sigma = \operatorname{Re} \mu$, где

$$\mu = \frac{\pi r^2}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{m \neq k} \frac{1}{(a_k - a_m)^2}$$

Имеет место следующая

Лемма. Пусть $g(z) = \bar{z}$. Если функция $\sigma = \text{Re} \mu$ достигает максимума на множестве точек $A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то

- 1) $\mu(A) \in R$;
- 2) каждый круг D_k касается хотя бы одного из остальных кругов D_m , причем замыкание $\overline{D^-}$ является связным множеством на комплексной плоскости C .

Из леммы вытекает, что расположение круговых включений всегда достигается при перколяции, то есть, когда круги, касаясь друг друга, образуют множество типа цепи.

В случае двух и трех круговых включений дано полное геометрическое описание оптимального расположения включений на плоскости.

В разделе 4.2, когда $|\rho| < 1$ получено точное описание функционала (9) в случае конечного числа круговых включений. В частности, установлено, что оптимальные значения достигаются для конфигураций типа цепи. Дано полное геометрическое описание решения модельной задачи оптимального размещения двух круговых включений на плоскости (то есть $D = \hat{C}$) в случае $g(z) = \bar{z}$, то есть необходимо найти экстремальное значение функционала (16) для кусочно аналитических функций, удовлетворяющих краевому условию

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) + \overline{\rho \varphi^-(t)} + \bar{t}, \quad t \in L, \quad (17)$$

где $L = L_1 \cup L_2$, а $L_i = \{z \in C : |z - a_i| = r\}$, $i = 1, 2$, - окружности постоянного радиуса r , центры которых a_1, a_2 ($|a_1 - a_2| \geq 2r$) подлежат определению. Верна следующая

Теорема. При любом фиксированном $|\rho| < 1$ функционал эффективной проводимости λ_e принимает максимальное значение в том случае, когда круговые включения касаются друг друга и расположены вдоль вещественной оси, и минимальное значение - когда круговые включения касаются друг друга и расположены вдоль мнимой оси.

В разделе 4.3 дается конструктивный анализ задачи оптимального дизайна в случае n круговых включений и произвольного внешнего потока. Возникающая при этом задача R -линейного сопряжения (10) сведена к каскаду задач методом малого параметра. Получена приближенная формула для значений функционала эффективной проводимости на множестве решений данного каскада задач.

В разделе 4.4 рассматривается случай включений произвольной формы при условии $g(z) = \bar{z}$, который важен с точки зрения механики компози-

ционных материалов. Соответствующая задача R -линейного сопряжения решена методом малого параметра. Установлено представление функционала эффективной проводимости на множестве решений этой задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации дается конструктивный анализ задач оптимального дизайна двумерных композиционных материалов в случае потенциальных полей. При этом:

1. Сформулированы новые типы задач оптимального дизайна для двумерных композиционных материалов и разработан аналитический подход к их исследованию [4, 6].

2. Дано решение в замкнутой форме смешанных краевых задач для аналитических функций, на их основе исследована задача оптимального дизайна композиционного материала в случае одного и двух круговых включений [2, 5].

3. Получено явное представление функционала эффективной проводимости, исследована задача его оптимизации на множестве решений краевых задач и дано описание неограниченных композиционных материалов, обладающих оптимальной эффективной проводимостью [3, 6].

4. Установлено явное представление функционала эффективной проводимости, исследована задача его оптимизации на множестве решений краевых задач и дано описание ограниченных композиционных материалов, обладающих оптимальной эффективной проводимостью [1].

5. Получено решение задачи оптимизации функционала эффективной проводимости для композиционных материалов с малым параметром Бергмана [4].

Полученные результаты применяются к описанию композиционных материалов с цилиндрическими включениями, обладающих максимальной или минимальной эффективной проводимостью.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ДИССЕРТАЦИИ

Статьи

1. Макарук С. Ф. Смешанная краевая задача для аналитических функций со свободной частью границы // Труды института математики НАН Беларуси. - 2001. - Том 9. - С. 101-104.

2. Макарук С. Ф. Конструктивный анализ задачи оптимального дизайна композиционного материала в случае двух круговых включений // Вестник БГТУ. Сер. физика, математика, химия. - 2002. - № 5. - С. 57-60.

3. Макарук С. Ф. Краевая задача о скачке для многосвязной области с оптимальным размещением внутренних областей // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. - 2003. - № 3. - С. 26-29.

4. Макарук С. Ф. Аналитический подход к исследованию задачи оптимального дизайна двумерного композиционного материала // Вестник БГТУ. Сер. физика, математика, химия. - 2003. - № 5. - С. 31-34.

Тезисы

5. Макарук С. Ф. Краевая задача с неизвестным включением // IV Республиканская научная конференция студентов и аспирантов: Тезисы докладов, Гомель, 19-22 марта 2001 г./ ГГУ. - Гомель, 2001. - С. 105-106.

6. Макарук С. Ф. Конструктивный анализ задачи оптимального дизайна неограниченного композиционного материала // AMADE-2003: Тезисы докладов междунар. науч. конф., Минск, 4-9 сентября 2003 г./ БГУ. - Минск, 2003. - С. 116.



РЕЗЮМЕ

Макарук Светлана Федоровна

**СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ
ОБЛАСТЯХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО ДИЗАЙНА КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛОВ**

Ключевые слова: потенциалные поля, функционал эффективной проводимости, смешанные краевые задачи для аналитических функций, метод функциональных уравнений, оптимальный дизайн композиционных материалов, двумерные композиционные материалы.

Объект исследования - задача оптимизации функционала эффективной проводимости на множестве решений смешанных краевых задач для аналитических функций в многосвязных областях. Предмет исследования - описание оптимальной структуры двумерных композиционных материалов с конечным числом включений.

Цель диссертационной работы - конструктивное решение задачи оптимизации функционала эффективной проводимости двумерных композиционных материалов на множестве решений смешанных краевых задач для соответствующих потенциалов.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Получено решение смешанных краевых задач для аналитических функций на основе сведения этих задач к функциональным уравнениям.
2. Установлено представление в замкнутой форме функционала эффективной проводимости на множестве решений краевых задач для ограниченной многосвязной области.
3. Установлено представление в замкнутой форме функционала эффективной проводимости на множестве решений краевых задач для неограниченной многосвязной области.
4. Получено геометрическое описание оптимальной конфигурации композиционных материалов в случае простейших внешних полей.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях эффективных свойств композиционных материалов, а также при конструировании композиционных материалов с оптимальным размещением включений заданной формы и размера.

РЭЗЮМЕ

Макарук Святлана Федараўна

**ЗМЕШАНЫЯ КРАЯВЫЯ ЗАДАЧЫ ДЛЯ АНАЛІТЫЧНЫХ
ФУНКЦЫЙ У МНАГАЗВЯЗНЫХ АБЛАСЦЯХ І ІХ
ПРЫМЯНЕННЕ ДА РАШЭННЯ ЗАДАЧ АПТЫМАЛЬНАГА
ДЫЗАЙНА КАМПАЗІЦЫЙНЫХ МАТЭРЫЯЛАЎ**

Ключавыя словы: патэнцыяльныя палі, функцыянал эфектыўнай праводнасці, змешаныя краявыя задачы для аналітычных функцый, метады функцыянальных раўненняў, аптымальны дызайн кампазіцыйных матэрыялаў, двухмерныя кампазіцыйныя матэрыялы.

Аб'ектам даследвання з'яўляецца задача аптымізацыі функцыянала эфектыўнай праводнасці на мностве рашэнняў змешаных краявых задач для аналітычных функцый у выпадку абмежаваных і неабмежаваных мнагазвязных абласцей. Прадметам даследвання з'яўляецца апісанне аптымальнай структуры двумерных кампазіцыйных матэрыялаў з канечным лікам цыліндрычных уключэнняў.

Мэтай работы з'яўляецца канструктыўнае апісанне рашэння задачы аптымізацыі функцыянала эфектыўнай праводнасці двумерных кампазіцыйных матэрыялаў з цыліндрычнымі ўключэннямі на мностве рашэнняў змешаных краявых задач для адпаведных патэнцыялаў.

У дысертацыйнай рабоце атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. Атрымана рашэнне змешаных краявых задач для аналітычных функцый на аснове іх звядзення да функцыянальных раўненняў.

2. Устаноўлена прадстаўленне функцыянала эфектыўнай праводнасці на мностве рашэнняў краявых задач для неабмежаваных мнагазвязных абласцей.

3. Устаноўлена прадстаўленне функцыянала эфектыўнай праводнасці на мностве рашэнняў краявых задач для абмежаваных мнагазвязных абласцей.

4. Атрымана геаметрычнае апісанне аптымальнай канфігурацыі матэрыялаў у выпадку прасцейшых знешніх палёў.

Работа носіць тэарэтычны характар. Атрыманыя вынікі могуць быць выкарастаны ў тэарэтычных даследваннях эфектыўных уласцівасцей кампазіцыйных матэрыялаў, а таксама пры канструіраванні кампазіцыйных матэрыялаў з аптымальным размяшчэннем уключэнняў дадзенай формы і размеру.

SUMMARY

Svetlana F. Makaruk

MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE ANALYTIC FUNCTIONS IN MULTIPLY CONNECTED DOMAINS AND THEIR APPLICATION TO THE SOLVING OF THE OPTIMAL DESIGN PROBLEMS FOR COMPOSITE MATERIALS

Keywords: potential fields, functional of effective conductivity, mixed boundary value problems for analytic functions, method of functional equations, optimal design of composite materials, two-dimensional composite materials.

The object of the investigation is a problem for optimization of the effective conductivity functional on the set of solutions of mixed boundary value problems for the analytic functions in the case of bounded and unbounded multiply connected domains. The subject of the research is to describe the optimal structure of two-dimensional composite materials with finite numbers of the cylindrical inclusions.

The purpose of the work is to obtain the constructive description of the solution to the problem of optimization of effective conductivity functional for two-dimensional composite materials with cylindrical inclusions on the set of solutions to mixed boundary value problems for the corresponding potentials.

The following results have been obtained:

1. The solutions of the mixed boundary value problems for the analytic functions are obtained by the reduction to the functional equations.
2. An exact form of the effective conductivity functional is established on the set of solutions of the boundary value problems for the unbounded multiply connected domain.
3. An exact form of the effective conductivity functional is established on the set of solutions of the boundary value problems for the bounded multiply connected domain.
4. Geometric description of the optimal configuration of composite materials in the case of simplest external fields is obtained.

The thesis has a theoretic character. The obtained results can be used in the theoretical studies of the effective properties of composite materials as well as for the construction of the composite materials with optimal displacement of inclusions of a fixed form and shape.

Подписано в печать 31.03.2004. Формат 60×84 1/16.
Тираж 100 экз. Зак. № 284.

Отпечатано с готового оригинала-макета заказчика
в Республиканском унитарном предприятии
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Лицензия ЛП № 461 от 14.08.2001.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.