УДК 517.9

Е. В. КУЗЬМИНА
Брест, БрГТУ

К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МЕРОМОРФНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$U' + QU = 0, \tag{1}$$

где Q – обобщенная функция, совпадающая с заданной мероморфной функцией q вне особенностей. В работах [1; 2] были рассмотрены случаи, когда $q = \frac{s}{x}$, $Q = s\left(P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta\right)$ и s – целое число. Это существенно использовалось при исследовании, так как при целых s соответствующее уравнение на комплексной плоскости имеет мероморфное решение. Оказалось, что обобщенное решение существует не для всех значений числа M. Случай двух особых точек рассмотрен в [3].

Цель данной работы – изучить, какие отличия появляются при нецелом s. Для примера рассмотрим уравнения

$$U' + \frac{3}{2}P\left(\frac{1}{x}\right)U = 0 \qquad 2)$$

и

$$U' + \frac{3}{2}\left(P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta\right)U = 0. \tag{3}$$

Вначале напомним, как вводится понятие решения для уравнения с обобщенным коэффициентом. Обобщенный коэффициент Q заменим на его аппроксимацию гладкими функциями q_ε и рассмотрим семейство уравнений

$$u_\varepsilon'(x) + q_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = 0, \tag{4}$$

решение задачи Коши с условием $u_\varepsilon(-1) = C$ для (4) обозначим $u_\varepsilon(x)$.

Если семейство гладких функций $u_\varepsilon(x)$ сходится в пространстве распределений, то его предел U будем называть *обобщенным решением задачи Коши для уравнения* (1) *при заданном способе аппроксимации коэффициента.*

Для распределения Q будем использовать аппроксимацию гладкими функциями, порожденную аналитическим представлением

$$q = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[q^+(x + i\varepsilon) - q^-(x - i\varepsilon)\right],$$

где q^+ – функция аналитическая в верхней полуплоскости, q^- – функция аналитическая в нижней полуплоскости.

Рассмотрим уравнение (2). Для распределения $P\left(\frac{1}{x}\right)$ аппроксимирующее семейство имеет вид

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+i\varepsilon}+\frac{1}{x-i\varepsilon}\right]=\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}.$$

Для распределения $q=\frac{3}{2}P\left(\frac{1}{x}\right)$ аппроксимирующее семейство есть

$$q_\varepsilon(x)=\frac{3}{4}\frac{1}{x+i\varepsilon}+\frac{3}{4}\frac{1}{x-i\varepsilon}.$$

Решения аппроксимирующих уравнений (4) найдем по формуле

$$u_\varepsilon(x)=Ce^{-\int_{-1}^{x}q_\varepsilon(t)dt}.$$

Получим

$$u_\varepsilon(x)=C\left(\frac{(-1+i\varepsilon)(-1-i\varepsilon)}{(x+i\varepsilon)(x-i\varepsilon)}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Обратим внимание, что степень 3/4 задает многозначную функцию. Здесь мы понимаем, что $u_\varepsilon(x)$ – одна из ветвей этой функции, которая в точке –1 принимает значение C. Детальный анализ показывает, что данное семейство $u_\varepsilon(x)$ не сходится в пространстве распределений и уравнение (2) не имеет обобщенных решений. Далее рассмотрим уравнение (3). Для δ-функции аппроксимирующее семейство имеет вид

$$\frac{i}{2\pi}\left[\frac{1}{x+i\varepsilon}-\frac{1}{x-i\varepsilon}\right]=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.$$

Тогда аппроксимирующее семейство для распределения $q=\frac{3}{2}\left(P\left(\frac{1}{x}\right)-i\pi\delta\right)$ можно записать в виде

$$q_\varepsilon(x)=\frac{3}{2}\frac{1}{x+i\varepsilon}.$$

Решения аппроксимирующих уравнений (4) есть семейство

$$u_\varepsilon(x)=C\left(\frac{-1+i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{5}$$

Здесь, как и выше, $u_\varepsilon(x)$ есть одна из ветвей многозначной функции. *Однако в этом случае $u_\varepsilon(x)$ имеет предел в пространстве распределений.*

Теорема. *Семейство* (5) *сходится в пространстве распределений к обобщенной функции* $-iC(x+i0)^{-\frac{3}{2}}$.

◀ Семейство $(x+i\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ при $\varepsilon \to 0$ сходится в пространстве распределений. Его предел обозначают $(x+i0)^{-\frac{1}{2}}$. Интересующее нас семейство $(x+i\varepsilon)^{-\frac{3}{2}}$ есть производная от $-2(x+i\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$, поэтому сходится к производной от обобщенной функции $-2(x+i0)^{-\frac{1}{2}}$, предел обозначается $(x+i0)^{-\frac{3}{2}}$. А $(-1+i\varepsilon)^{\frac{3}{2}}$ стремится к $-i$. Значит, предел $u_\varepsilon(x)$ из (5) существует в пространстве распределений и равен $-iC(x+i0)^{-\frac{3}{2}}$. Теорема доказана.

Принципиальное отличие уравнений (2) и (3) от случаев в [1–3] заключается в том, что здесь функция $u_\varepsilon(x)$ определяется через ветвь многозначной функции и ее поведение сложнее, чем в случае целых показателей. Рассмотренные примеры показывают, что при $Q=\frac{3}{2}\left(P\left(\frac{1}{x}\right)+M\delta\right)$ обобщенные решения уравнения (1) для одних значений M существуют, а для других – нет. Общая задача заключается в нахождении среди обобщенных функций, совпадающих с мероморфной функцией вне особенностей, тех, при которых существует обобщенное решение. ▶

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антоневич, А. Б. Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом / А. Б. Антоневич, Т. Г. Шагова // Тавр. Вестн. Информатики и Математики. – 2019. – № 3. – С. 23–36.

2. Антоневич, А. Б. Решения дифференциального уравнения $u'+\frac{s}{x}u=0$ в пространстве распределений / А. Б. Антоневич, Е. В. Кузьмина // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 2. – С. 56–66.

3. Кузьмина, Е. В. Обобщенные решения дифференциального уравнения первого порядка с рациональным коэффициентом специального вида / Е. В. Кузьмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 1 (46). – С. 54–61.