

УДК 517.968

В. Т. ДАЦЫК

Брест, БрГТУ

**ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ КONTИНУАЛЬНОГО ПОРЯДКА**

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$D_{0x}^{[\alpha, \beta]} y_j(x) + \lambda y_j(x) = f_j(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) \quad x \in (0; a), \quad (1)$$

где $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\lambda \geq 0$,

$$D_{0x}^{[\alpha, \beta]} z(x) = \int_{\alpha}^{\beta} D_{0x}^{t'} z(x) dt - \quad (2)$$

оператор интегродифференцирования континуального порядка, т. е. интеграл от производной Римана – Лиувилля по порядку дифференцирования, $D_{0x}^{t'}$ – дробная производная порядка t в смысле Римана – Лиувилля

$$D_{0x}^{t'} z(x) = \text{sign}^n x \cdot \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{t-n} z(x), \quad n-1 < t \leq n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

В настоящей статье для системы уравнений (1) исследуется задача Коши, т. е. задача отыскания решения (1), удовлетворяющего условиям

$$\frac{x^{1-\beta} y_j(x)}{\ln x} \in C[0, \alpha] \cap C^1(0, \alpha), \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{[\alpha-1, \beta-1]} y_j(x) = y_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Теорема. Если $f_j \in L(0, a)$, $\beta \in (0; 1)$, $\alpha < \beta$ при каждом $j = 1, 2, \dots, m$, то существует единственное решение системы (1), удовлетворяющее условиям (4) и (5), представимое в виде

$$y_j(x) = y_{0j} w_j(x) + f_j(x, y_1, \dots, y_j) \cdot w_j(x) \quad (6)$$

$j = 1, 2, \dots, m$, где $w_j(x)$ – есть решение соответствующей однородной системы,

$$D_{0x}^{[\alpha, \beta]} w_j(x) + \lambda w_j = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{[\alpha-1, \beta-1]} w_j(x) = 1. \quad (8)$$

◀ Из (2) и (3), согласно [1], получим

$$D_{0x}^{[\alpha, \beta]} y_j(x) = \int_0^x y_j(s) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(x-s)^{t-1}}{\Gamma(-t)} dt ds = V_j(x, \alpha, \beta) * y_j(x), \quad (9)$$

где $V_j = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^{-t-1}}{\Gamma(-t)} dt$, $j = 1, 2, \dots, m$.

С другой стороны, на основании свойств операторов интегродифференцирования континуального порядка (2) и Римана – Лиувилля (3) имеем

$$D_{\alpha x}^{[\alpha, \beta]} y_j(x) = \frac{d^n}{dx^n} [y_j(x) * V_j(x, \alpha - n, \beta - n)], \quad n-1 < \beta \leq n. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что

$$D_{\alpha x}^{[\alpha, -1, \beta-1]} y_j(x) = y_j(x) * V_j(x, \alpha - 1, \beta - 1) \text{ и}$$

$$D_{\alpha x}^{[\alpha, \beta]} y_j(x) = \frac{d}{dx} [y_j(x) * V_j(x, \alpha - 1, \beta - 1)].$$

Отсюда, с помощью равенства

$$\frac{d}{dx} (g * h) = g * h' + h(0) \cdot g(x),$$

с учетом условия (5), получим

$$\frac{d}{dx} [w_j * y_j * V_j(x, \alpha - 1, \beta - 1)] = w_j * D_{\alpha x}^{[\alpha, \beta]} y_j(x) + y_{0j} w_j(x). \quad (11)$$

Аналогично, учитывая (8), приходим к соотношениям

$$\frac{d}{dx} [w_j * y_j * V_j(x, \alpha - 1, \beta - 1)] = y_j * D_{\alpha x}^{[\alpha, \beta]} w_j(x) + y_j(x). \quad (12)$$

Прибавив к (11) и (12) для каждого $j = \overline{1, m}$ выражение $\lambda(y_j * w_j)(x)$ и вычитая (11) из (12), получим

$$w_j * [D_{\alpha x}^{[\alpha, \beta]} y_j + \lambda y_j] - y_j * [D_{\alpha x}^{[\alpha, \beta]} w_j + \lambda w_j] = y_j(x) - y_{0j} * w_j(x). \quad (13)$$

Отсюда следует (6).

Из работы [2], формул (7), (8) и равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{\alpha x}^{[\alpha-1, \beta-1]} (f_j * w_j)(x) = 0, \quad j = \overline{1, m} \quad (14)$$

следует, что функции $y_j(x)$, определенные формулой (6) являются решением системы (1) и удовлетворяют условиям (4), (5). ►

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев, А. М. О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах / А. М. Нахушев // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 300, № 4. – С. 796–799.
2. Дацук, В. Т. Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений со старшей производной дробного порядка / В. Т. Дацук, Н. П. Семенчук // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 6. – С. 35–39.