УДК 004.942:519.218

Л. П. МАХНИСТ, Е. Н. ЗАЩУК, И. И. ГЛАДКИЙ, Т. Ю. ЮХИМУК
Брест, БрГТУ

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГИДРОЛОГИИ

В работе рассматривается стохастическая модель процесса многолетних колебаний речного стока, представленная в виде системы дифференциальных уравнений (например, в [1] или [2]):

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_1}{d\xi}=-1, \quad \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_2}{d\xi}=-2\theta_1 \qquad (1)$$

с граничными условиями $\frac{d\theta_n}{d\xi}(+\infty)=0,\ \theta_n(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0\ \ (k=\overline{1,2})$.

Эта модель, широко используемая в стохастической гидрологии, получена на основе уравнения Фоккера – Планка, при некоторых условиях на переходную функцию плотности вероятности [1].

Заметим, что решения системы $\theta_1(\xi)$ и $\theta_2(\xi)$ служат для оценки математического ожидания и среднего квадратичного отклонения модели процесса многолетних колебаний речного стока [3].

Решение первого уравнения системы (1) в виде степенного ряда получено в [1], а в [2] приведены асимптотические оценки этого решения. В работах [3], [4] получено решение системы, представленное в виде степенных рядов и исследована их сходимость в [5].

В данной работе предложен подход к решению системы (1) с использованием системы компьютерной алгебры *Mathematica* (например, в [6]).

Так, используя СКА *Mathematica*, решение первого дифференциального уравнения системы (1) при соответствующих граничных условиях в аналитическом виде можно записать в виде:

$$\theta_1(\xi)=S_1(\xi)-S_1(\xi_*),$$

$$S_1(\xi)=\frac{\pi}{2}erfi\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\xi^2}{2}\cdot{}_2F_2\left(1,1;\frac{3}{2},2;\frac{\xi^2}{2}\right),$$

где $erfi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$ – мнимая функция ошибок (imaginary error function – erfi), записанная в виде ряда Маклорена, ${}_2F_2\left(1,1;\frac{3}{2},2;\frac{\xi^2}{2}\right)$ – соответствующее значение обобщенной гипергеометрической функции (generalized hypergeometric function) вида: ${}_2F_2(a,b;c,d;x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a)_n(b)_n x^n}{(c)_n(d)_n n!}$,

а $(p)_n=\prod_{k=1}^{n}(p+k-1)$ – восходящий символ Похгаммера (Pochhammer symbol).

Следовательно,

$$\frac{\pi}{2}erfi\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}}{n!(2n+1)}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}.$$

Так как $(1)_n=n!$, $\left(\frac{3}{2}\right)_n=\frac{(2n+1)!!}{2^n}$, $(2)_n=(n+1)!$, то

$${}_2F_2\left(1,1;\frac{3}{2},2;x\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!\cdot n!\cdot x^n}{\frac{(2n+1)!!}{2^n}\cdot(n+1)!\cdot n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n x^n}{(2n+1)!!(n+1)} \quad \text{и}$$

$$\frac{\xi^2}{2}\cdot{}_2F_2\left(1,1;\frac{3}{2},2;\frac{\xi^2}{2}\right)=\frac{\xi^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{(2n+1)!!(n+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}.$$

Тогда решение первого уравнения системы (1) можно записать в виде:

$$S_1(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$$

или в виде знакочередующегося ряда:

$$S_1(\xi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k},$$

где $\{t\}$ – дробная часть числа t.

Очевидно, что $\frac{d\theta_1}{d\xi}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k+1}{2}\right\}}\frac{(-1)^k\xi^k}{k!!}$ и $\frac{d\theta_1}{d\xi}(0)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Используя СКА *Mathematica*, построим графики функций $\theta_1(\xi)=S_1(\xi)$ $(\xi_*=0)$ и $\frac{d\theta_1}{d\xi}$ (рисунок).

Рассмотренный подход к решению системы (1) можно предложить к использованию для оценки и других параметров модели процесса многолетних колебаний речного стока (например, в [3]).

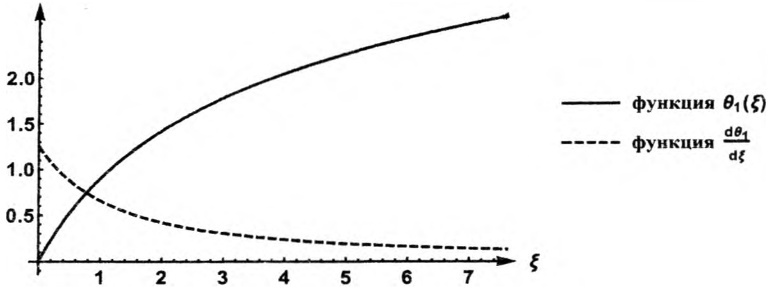

Рисунок – Графики функций

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек [и др.] // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2008. – № 5. – С. 83–87.

2. Волчек, А. А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь : сб. материалов междунар. науч.-техн. конф., Брест, 22–23 апр. 2010 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. В. Басов [и др.]. – Брест, 2010. – С. 45–49.

3. Волчек, А. А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 68–77.

4. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А. А. Волчек [и др.] // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2010. – № 5. – С. 48–53.

5. К вопросу о сходимости параметров одной модели стохастической гидрологии / А. А. Волчек [и др.] // Проблемы устойчивого развития регионов Республики Беларусь и сопредельных стран : сб. науч. ст. Второй Междунар. науч.-практ. конф., Могилев, 27–29 марта 2012 г. : в 2 ч. / Могилев. гос. ун-т им. А. А. Кулешова ; под ред. И. Н. Шарухо [и др.]. – Могилев, 2012. – Ч. 1. – С. 170–175.

6. Защук, Е. Н. Приближенный метод решения задачи хемостата с взаимозаменяемыми субстратами / Е. Н. Защук, В. П. Черненко // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2019. – № 5. – С. 54–56.