УДК 004.942:519.218

**Л. П. МАХНИСТ, А. А. ВОЛЧЕК, И. И. ГЛАДКИЙ, В. С. РУБАНОВ**
Брест, БрГТУ

# МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МОДЕЛИ ГИДРОЛОГИИ

Для описания колебаний речного стока рассмотрим марковский процесс, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть $\overline{V}$ – среднегодовой расход воды, а $V_t$ – расход воды в момент времени $t$. Тогда, полагая $X_t = (V_t - \overline{V}) / \overline{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна – Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma\, dW_t, \tag{1}$$

где $W_t$ – стандартный винеровский процесс, $\frac{dW_t}{dt} = W_t'$ – обобщенный случайный процесс белого шума с параметром $\sigma = C_V\sqrt{2k}$, $C_V$ – коэффициент вариации, $k^{-1}$ – время релаксации речного стока.

Процесс Орнштейна – Уленбека является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с коэффициентом сноса $a(t,x) = -kx$ и диффузии $s(t,x) = s^2$, переходная плотность вероятности $p(t, x, y)$ которого является фундаментальным решением соответствующего уравнения Фоккера – Планка (т. е. прямого уравнения Колмогорова) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial y}(yp) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

где коэффициент $k$ определяется по формуле $k = -\ln r$, так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид $e^{-kt}$, а $r$ – коэффициент автокорреляции годового стока.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ сток равен $x$, а $x_*$ – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение $V$ будет находиться в полуинтервале $[x_*, \infty)$ при условии, что $x \in [x_*, +\infty)$. Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ, однородны по времени, обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,\ x,\ y)=-kx\frac{\partial}{\partial x}p(t,\ x,\ y)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(t,\ x,y)}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Пусть $T$ – момент времени, в который значение $V$ покинет промежуток $[x_*,\ \infty)$. Тогда $prob(T\geq t)=G(t,x),\ G(t,x)=\int\limits_{x_*}^{+\infty}p(t,\ x,y)dy$.

Так как функция $1-G(t,x)$ является распределением случайной величины $T$, то моменты $n$-го порядка времени достижения границы $x_*$ определяются соотношениями $T_k=-\int\limits_0^{+\infty}t^k\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt=\int\limits_0^{+\infty}kt^{k-1}G(t,x)dt$.

Интегрируя по $t$ на интервале от 0 до $+\infty$ соотношение (2), получаем следующие уравнения для $T_n$:

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_n}{d\,x^2}-kx\frac{dT_n}{dx}=-nT_{n-1},\ \text{при}\ \frac{dT_n}{dx}(+\infty)=0,\ \ T_n(x)\big|_{x=x_*}=0\ \ (T_0=1).$$

Введем величины $k^nT_n=\theta_n,\ x\frac{\sqrt{2k}}{\sigma}=\xi,\ x_*\frac{\sqrt{2k}}{\sigma}=\xi_*$.

Тогда $kx\frac{dT_n}{dx}=\frac{x}{k^{n-1}}\frac{d\left(k^nT_n\right)}{dx}=\frac{x}{k^{n-1}}\frac{d\theta_n}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}=\frac{x}{k^{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{2k}}{\sigma}\frac{d\theta_n}{d\xi}=\frac{\xi}{k^{n-1}}\frac{d\theta_n}{d\xi}$.

Учитывая, что $\frac{dT_n}{dx}=\frac{1}{k^n}\cdot\frac{\sqrt{2k}}{\sigma}\frac{d\theta_n}{d\xi}$, получим

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_n}{dx^2}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{k^n}\cdot\frac{\sqrt{2k}}{\sigma}\frac{d\theta_n}{d\xi}\right)\cdot\frac{d\xi}{dx}=\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{1}{k^n}\cdot\frac{\sqrt{2k}}{\sigma}\cdot\frac{\sqrt{2k}}{\sigma}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\theta_n}{d\xi}\right)=\frac{1}{k^{n-1}}\frac{d^2\theta_n}{d\xi^2}.$$

Так как $T_{n-1}=\frac{\theta_{n-1}}{k^{n-1}}$, то уравнения $\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_n}{d\,x^2}-kx\frac{dT_n}{dx}=-nT_{n-1}$ можно записать в виде: $\frac{1}{k^{n-1}}\frac{d^2\theta_n}{d\xi^2}-\frac{\xi}{k^{n-1}}\frac{d\theta_n}{d\xi}=-\frac{n\theta_{n-1}}{k^{n-1}}$ или $\frac{d^2\theta_n}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_n}{d\xi}=-n\theta_{n-1}$.

Получим систему для оценки математического $T_1=\theta_1/k$, среднего квадратичного отклонения $\sigma_T=\sqrt{\theta_2-\theta_1^2}/k$, коэффициентов асимметрии $\alpha_T=\theta_3/\sqrt{\left(\theta_2-\theta_1^2\right)^3}$ и эксцесса $\beta_T=\theta_4/\left(\theta_2-\theta_1^2\right)^2-3$ случайной величины $T$:

$$\frac{d^2\theta_n}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_n}{d\xi} = -n\theta_{n-1}, \text{ при } \frac{d\theta_n}{d\xi}(+\infty) = 0, \ \theta_n(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0 \ \ (\theta_0 = 1). \quad (3)$$

Решение уравнения системы (3) для оценки математического ожидания в виде степенного ряда получено в [1], а в [2] приведены асимптотические оценки этого решения. В работах [3], [4] получено решение системы при $n = 2$, представленное в виде степенных рядов и исследована их сходимость в [5–7].

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек [и др.] // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2008. – № 5. – С. 83–87.

2. Волчек, А. А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь : сб. материалов междунар. науч.-техн. конф., Брест, 22–23 апр. 2010 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. В. Басов [и др.]. – Брест, 2010. – С. 45–49.

3. Волчек, А. А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 68–77.

4. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А. А. Волчек [и др.] // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2010. – № 5. – С. 48–53.

5. О моментах распределения вероятностей модели диффузионного типа в практике гидрологии / А. А. Волчек [и др.] // Математика и ее приложения : межвуз. сб. науч. тр. / Ассоциация математиков вузов северо-запада ; под ред. Д. П. Голоскокова, А. Р. Шкадовой. – СПб. : СПГУВК, 2011. – Вып. 3. – С. 139–148.

6. О сходимости решения диффузионной модели стохастической гидрологии / А. А. Волчек [и др.] // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2011. – № 5. – С. 69–73.

7. К вопросу о сходимости параметров одной модели стохастической гидрологии / А. А. Волчек [и др.] // Проблемы устойчивого развития регионов Республики Беларусь и сопредельных стран : сб. науч. ст. Второй Междунар. науч.-практ. конф., Могилев, 27–29 марта 2012 г. : в 2 ч. / Могилев. гос. ун-т им. А. А. Кулешова ; под ред. И. Н. Шарухо [и др.]. – Могилев, 2012. – Ч. 1. – С. 170–175.