# ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МЕРОМОРФНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

**Кузьмина Е.В.**

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест, Беларусь
elena_kuzmina@inbox.ru

Предметом исследования являются обобщенные решения одного класса линейных дифференциальных уравнений первого порядка на $\mathbb{R}$

$$U' - QU = 0, \tag{1}$$

где $Q$ – обобщенная функция. Для такого уравнения не определено понятие решения, так как обобщенная функция $U$ не может быть подставлена в уравнение. Если задано семейство гладких функций $q_\varepsilon(x)$, зависящее от малого параметра $\varepsilon$, которое сходится к распределению $Q$ при $\varepsilon \to 0$, то будем говорить, что распределение $U$ является *обобщенным решением задачи Коши для уравнения* (1) *с условием* $u(x_0) = C$ *при заданном способе аппроксимации коэффициента*, если семейство $u_\varepsilon(x)$ решений уравнений

$$u'_\varepsilon(x) - q_\varepsilon(x)\, u_\varepsilon(x) = 0, \tag{2}$$

удовлетворяющих условию Коши $u_\varepsilon(x_0) = C$, сходится к $U$ в смысле сходимости в $D'(\mathbb{R})$.

Рассмотрим задачу о существовании обобщенного решения уравнений (1) с обобщенным коэффициентом $Q$, совпадающим с такой заданной мероморфной функцией $q$ на дополнении к множеству полюсов этой функции, при которой уравнение на комплексной плоскости, соответствующее (1), имеет мероморфное решение. На конечном интервале $(-N, N)$ такая функция $q$ представляется в виде

$$q(x) = \sum_{|a_k|<N} \frac{s_k}{x - a_k} + b_N(x), \tag{3}$$

где $b_N(z)$ – гладкая на $(-N, N)$ функция, $s_k$ – целые числа. В работах [1–3] рассмотрены частные случаи такой задачи и показано, что именно такой специальный вид функции $q$ приводит к существованию обобщенного решения. Так как функции $1/(x - a_k)$ соответствует семейство обобщенных функций $P(1/(x - a_k)) + \mathrm{const}\, \delta_{a_k}$, то функции $q$ соответствует семейство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(-N, N)$ вида

$$Q_N = \sum_{|a_k|<N} s_k \left[ P\left(\frac{1}{x - a_k}\right) + M_k \delta_{a_k} \right] + b_N(x), \tag{4}$$

где $M_k$ – произвольные комплексные числа. Функционал $Q_{N+1}$, определенный формулой (3) на пространстве $\mathcal{D}(-N-1, N+1)$, на $\mathcal{D}(-N, N)$ совпадает с $Q_N$, поэтому при заданных числах $M_k$ получаем обобщенную функцию $Q$ на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \bigcup_N \mathcal{D}(-N, N)$.

Если коэффициент в (1) есть непрерывная функция $q$, то решение задачи Коши с условием $u(x_0) = C$ задается формулой

$$u(x) = Ce^{g(x)}, \tag{5}$$

где $g$ – первообразная для $q$, такая, что $g(x_0) = 0$. Для функций вида (3) при $x_0 \neq a_k$ такая первообразная определена неоднозначно, но для обобщенной функции $Q$ вида (4) такая первообразная определена однозначно, является обычной локально интегрируемой функцией и формула (5) задает решение, которое будем назвать *формальным.*

**Теорема 1.** *Формальное решение и задачи Коши с условием $u(x_0) = C$ для уравнения с рассматриваемым коэффициентом $Q$ имеет на интервале $(-N, N)$ вид*

$$u(x) = u_{\mathrm{mer}}(x)\frac{S(x)}{S(x_0)}, \tag{6}$$

*где $u_{\mathrm{mer}}(x)$ – мероморфное решение, заданное формулой*

$$u_{\mathrm{mer}}(x) = Ce^{\int_{x_0}^{x} b_N(t)\,dt} \prod_{|a_k|<N} \frac{(x-a_k)^{s_k}}{(x_0-a_k)^{s_k}},$$

*а $S(x)$ – кусочно-постоянная функция, имеющая вид*

$$S(x) = \prod_{-N<a_k<x} (-1)^{s_k} e^{s_k M_k},$$

*со скачками в тех точках $a_k$, где $e^{s_k M_k} \neq (-1)^{s_k}$.*

Формальное решение (6) не является локально интегрируемой функцией и не является обобщенным решением. Рассмотрим аппроксимацию коэффициента $Q$ гладкими функциями, заданную с помощью ее аналитического представления [4, 5]. На интервале $(-N, N)$ такое аппроксимирующее семейство для обобщенной функции (4) может быть записано в виде

$$q_\varepsilon(x) = \sum_{|a_k|<N} \frac{\lambda_k s_k}{x + i\varepsilon - a_k} + \sum_{|a_k|<N} \frac{(1-\lambda_k)s_k}{x - i\varepsilon - a_k} + b_N(x), \tag{7}$$

где $\lambda_k = 0.5 + M_k i/(2\pi)$. Тогда решения задачи Коши с условием $u(x_0) = C$ для аппроксимирующих уравнений (2) представляются в виде

$$u_\varepsilon(x) = Ce^{\int_{x_0}^{x} b_N(t)\,dt} \prod_{|a_k|<N} \left(\frac{x_0 - a_k - i\varepsilon}{x - i\varepsilon - a_k}\right)^{-s_k} \left(\frac{x - i\varepsilon - a_k}{x + i\varepsilon - a_k} \cdot \frac{x_0 - a_k + i\varepsilon}{x_0 - a_k - i\varepsilon}\right)^{-\lambda_k s_k}.$$

**Теорема 2.** *При аппроксимации (7) семейство аппроксимирующих решений $u_\varepsilon(x)$ уравнений (2) сходится в пространстве обобщенных функций только для тех коэффициентов (4), у которых при $s_k < 0$ число $M_k$ имеет вид $M_k = i\pi(1 - 2m_k/s_k)$, где $m_k$ – целое, такое, что $m_k \leqslant s_k$ или $m_k \geqslant 0$. При этом предел семейства $u_\varepsilon(x)$ является одной из обобщенных функций, соответствующих формальному решению (6).*

### Литература

1. Антоневич А.Б., Шагова Т.Г. *Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом* // Таврическ. вестн. информатики и математики. 2019. № 3. С. 23–36.

2. Антоневич А.Б., Кузьмина Е.В. *Решения дифференциального уравнения $u' + \frac{s}{x}u = 0$ в пространстве распределений* // Весн. Гродз. дзярж. ўн-та імя Я. Купалы. Сер. 2.

Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 56–66.

3. Кузьмина Е.В. *Обобщенные решения дифференциального уравнения первого порядка с рациональным коэффициентом специального вида* // Проблемы физики, математики и техники. 2021. № 1 (46). С. 54–61.

4. Бремерман Г. *Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье.* М.: Мир, 1968.

5. Иванов В.К. *Асимптотическое приближение к произведению обобщенных функций* // Изв. вузов. Математика. 1981. № 1. С. 19–26.

# ЦЕЛЫЕ РЕШЕНИЯ БЕЗ НУЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**Немец В.С.**

Гродненский государственный университет, Гродно, Беларусь
nemets@grsu.by

Изучение свойств целых трансцендентных решений в виде экспоненциально-полиномиальных функций для дифференциальных уравнений первого порядка типа Риккати–Абеля

$$u' = \sum_{i=1}^{n} A_i(z)\exp(B_i(z))u^{\nu_i}, \tag{1}$$

где $A_i(z) \not\equiv 0$ и $B_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, – полиномы комплексного переменного $z$, числа $\nu_i$ – целые неотрицательные, проводилось различными учеными. Результаты этих исследований подробно изложены в монографии [1].

В докладе рассматривается уравнение порядка $l \in \mathbb{N}$, разрешенное относительно производной

$$u^{(l)} = \sum_{i=1}^{n} A_i(z)\exp(B_i(z))u^{\nu_i}, \tag{2}$$

которое является обобщением уравнения (1).

Продолжая исследования, начатые в [1–3], изучаются свойства решений уравнения (2) в виде целых трансцендентных решений без нулей, т.е., в виде

$$u\colon z \to \exp Q(z), \tag{3}$$

где $Q(z)$ – целая функция.

Решения (3) уравнения (2), следуя исследованиям, проводимым относительно полиномиальных и рациональных решений алгебраических дифференциальных уравнений, подразделяются на два класса: целые решения с особыми и целые решения с неособыми экспоненциальными частями. Исследования целых решений проводятся для каждого класса отдельно.

В случае конечного роста решений (3), т.е., когда функция $Q(z)$ является полиномом, устанавливается его степень, коэффициент при старшей степени, структура полинома.