АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ФУКСА

Антоневич А.Б.[1], Кузьмина Е.В.[2]

[1] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
antonevich@bsu.by
[2] Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест, Беларусь
elena_kuzmina@inbox.ru

Дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами появляются в разных приложениях, но такие уравнения представляют собой символическую запись, так как для них не определено понятие решения. Общий подход к введению понятия решения использует рассмотрение вместо обобщенных коэффициентов их аппроксимаций семействами гладких функций, зависящими от малого параметра ε. Если в пространстве распределений существует предел при $\varepsilon \to 0$ решений $u_\varepsilon(x)$ соответствующих аппроксимирующих уравнений, то он называется *обобщенным решением* исходного уравнения при заданном способе аппроксимации коэффициентов. Решения аппроксимирующих уравнений могут не сходиться и один из основных вопросов заключается в описании обобщенных коэффициентов и их аппроксимаций, при которых существуют обобщенные решения. В общем случае ответ на этот вопрос неизвестен, поэтому представляет интерес выделение специальных классов обобщенных коэффициентов, доступных для исследования.

Вопрос об обобщенных решениях оказался содержательным даже в случае скалярного уравнения с коэффициентом $q(x) = s/x^\alpha$ [1, 2]. Для такого уравнения обобщенное решение должно при $x \neq 0$ совпадать с одним из классических решений. Если $q(x) = 1/x^2$, то классическим решением является функция $u(x) = e^{1/x}$, и обобщенное решение не существует, так как нет обобщенной функции, совпадающей с $u(x)$ при $x \neq 0$. А при $q(x) = s/x$ классическими решениями являются функции $u(x) = C/x^s$, каждой из которых соответствует семейство обобщенных функций, совпадающих с ней при $x \neq 0$. Поэтому в первую очередь естественно рассмотреть т.н. фуксовы уравнения и системы, у которых коэффициенты имеют полюсы первого порядка.

В данной работе рассматриваются обобщенные решения систем дифференциальных уравнения вида

$$U' + QU = 0, \tag{1}$$

где Q – матрица из обобщенных функции, имеющих особенности только в одной точке 0 и совпадающая на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ с гладкой матрицей-функцией

$$q(x) = \frac{B}{x}, \tag{2}$$

где B – заданная постоянная матрица. Функции $1/x$ соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций вида $P(1/x) + C\delta$, которые могут быть определены как производные в смысле обобщенных функций от локально интегрируемых функций $\ln|x| + C\theta(x)$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда. Поэтому каждая обобщенная функция Q, совпадающая при $x \neq 0$ с (2), имеет вид

$$Q = B[P(1/x) + M\delta], \tag{3}$$

где M – произвольная постоянная матрица.

С системой (1) связана система уравнений на прямой

$$u'(x) + q(x)u(x) = 0, \tag{4}$$

и система на плоскости

$$u'(z) + q(z)u(z) = 0. \tag{5}$$

Для системы (4) матрица фундаментальных решений $V(x)$, нормированная условием $V(-1) = I$, определена при $x < 0$, неограничено возрастает при $x \to -0$ и не продолжается на положительную полуось.

Лемма 1. *Если матрица M коммутирует с B, то обобщенной функции* (3) *соответствует свое однозначное продолжение $V(x)$ матрицы фундаментальных решений системы* (4) *на положительную ось.*

Согласно лемме, при заданной обобщенной функции (3) формула $u(x) = V(x)\xi$ задает функцию, однозначно определенную на всей оси, которую будем называть *формальным решением задачи Коши с условием $u(-1) = \xi$.* Формальное решение имеет неинтегрируемые особенности и не является обобщенным решением.

Для системы (5) решение задачи Коши с условием $u(-1) = \xi$ является, как правило, многозначной аналитической функцией, одна из ветвей которой совпадает с решением системы (4) на отрицательной полуоси. Поэтому в общем случае у такого решения нет однозначно определенного значения на положительной полуоси. Заметим, что исследование поведения решений таких систем является классическим направлением, связанным с проблемой Римана – Гильберта [3, 4]. Рассмотрим случай наиболее простого поведения решения, когда оно является однозначной аналитической функцией, и тогда однозначно определено его значение на положительной полуоси.

Лемма 2. *Каждое решение системы* (5) *являются однозначной аналитической функцией тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B простые и являются целыми числами. При этом такое решение является мероморфным – его особенностями являются только полюса.*

При выполнении условий леммы получаем для систем аналог результатов, полученных в [1, 2] для скалярных уравнений.

Теорема. *Пусть все решения системы* (5) *являются однозначными аналитическими функциями. Если матрица M в* (3) *такова, что формальное решение системы* (4) *на прямой совпадает с решением, порожденным некоторым однозначным аналитическим решением $u(z)$ системы* (5), *то существует два обобщенных решения системы* (1), *которые могут быть заданы как пределы при $\varepsilon \to 0$ в пространстве обобщенных функций семейств гладких функций $u(x \pm i\varepsilon)$.*

Литература

1. Антоневич А.Б., Шагова Т.Г. *Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом* // Таврическ. Вестн. Информатики и Математики. 2019. № 3. С. 23–36.

2. Антоневич А.Б., Кузьмина Е.В. *Решения дифференциального уравнения* $u' + \frac{s}{x}u = 0$ *в пространстве распределений* // Весн. Гродз. дзярж. ўн-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 56–66.

3. Еругин Н.П. *Проблема Римана.* Мн.: Наука и техника, 1982.

4. Болибрух А.А. *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения.* М.: МЦНПО, 2000.

РЕЗОЛЬВЕНТА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПРЯМОЙ

Архипенко О.А.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
holly.archipenko@gmail.com

Рассматривается семейство разностных уравнений на прямой вида

$$a(x)u(x+1) - \lambda u(x) = f(x), \quad u \in L_2(\mathbb{R}), \tag{1}$$

где функция $a(x)$ непрерывна, $a(x) \neq 0$ для всех x и на $\pm\infty$ существуют конечные пределы $a(\pm\infty) \neq 0$. При условии, что

$$|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)| \tag{2}$$

уравнение (1) разрешимо для любой правой части $f \in L_2(\mathbb{R})$ и при этом пространство решений однородного уравнения бесконечномерно. Такая картина разрешимости типична для дифференциальных уравнений и для них обычно к уравнению добавляются краевые условия, обеспечивающие корректность задачи – существование и единственность решения. Для получения единственности решения к уравнению (1) также добавим краевой условие, заключающееся в требовании, чтобы решение принадлежало некоторому заданному подпространству L. При этом нужно выбрать L так, чтобы существовали λ, при которых краевая задача является корректной. Это выполнено, если L является дополнительным подпространством к пространству решений однородного уравнения.

Вработе показано, что в случае уравнений (1) подходящими для постановки корректных краевых задач являются подпространства L_η, состоящие из функций, удовлетворяющих нелокальным условиям вида

$$\sum_k u(k+\tau)\eta(k+\tau) = 0 \quad \text{при почти всех} \quad \tau \in [0,1], \tag{3}$$

где $\eta(x)$ – заданная функция из пространства принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство корректности задачи заключается в простроении ее резольвенты, т.е. такой операторно-значной функции $R_\eta(\lambda)$, что $u = R_\eta(\lambda)f$ есть решение уравнения (1), принадлежащее пространству L_η. Построение базируется на сведенни задачи к рассмотрению семейства краевых задач для дискретных операторов взвешенного сдвига

$$B_\tau u(k) = a(k,\tau)u(k+1), \quad k \in \mathbb{Z},$$