УДК 691

РАЗДЕЛЕНИЕ СМЕСИ ГАУССОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРИ ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Глухов Д.О., Глухова Т.М.

Проектирование строительных конструкций опирается на полувероятностные методы расчета, основанные на частных коэффициентах безопасности. Калибровка коэффициентов безопасности выполняется с учетом особенностей производства и систем контроля качества, принятых в той либо иной стране.

Действующие нормы Республики Беларусь, определяя параметрический ряд классов бетонов и арматуры, определяют семейство вероятностных моделей материалов. Параметры распределения случайной величины восстанавливаются по нормативным и средним значениям прочностных характеристик. Однако, в отличие от анализа результатов при обследовании, для моделирования тех или иных величин применяются распределения, отличные от нормального распределения.

Для выполнения вероятностных расчетов на стадии проектирования требуется по известным вероятностным моделям, лежащим в основе формирования проектных классов прочности, восстановить параметры теоретических распределений. Далее проводится статистическое моделирование методом Монте-Карло, и даются аналитические оценки взаимного влияния независимых случайных величин на распределение результирующей величины.

В целом ряде численных экспериментов было замечено, что, например, изгибаемые элементы, армированные оптимальным образом, при статистическом моделировании и варьировании прочностных свойств материалов, приводят к различным причинам достижения предельного состояния. Часть «образцов» разрушалось «по бетону», часть по «арматуре». Каждый класс моделей давал свой всплеск функции предельного состояния, которая, даже визуально, переставала соответствовать колоколообразному нормальному распределению.

Если в результате статистического моделирования в рамках полного вероятностного расчета нами получены оценки плотности вероятности для Q и R, то вероятность разрушения элемента P_f определяют как область перекрытия распределений, как показано на рисунке 1.

Рисунок 1 – Интерпретация области перекрытия распределений Q и R

Вероятность разрушения в этом случае определяется формулой

$$P_f = P(P < Q) = P(M < 0),$$

где P_f – вероятность разрушения элемента.

Определение точного значения данного интеграла является в большинстве случаев невыполнимой задачей, поэтому применятся упрощенные методы оценки значения интеграла, которые носят название FORM (First Order Reliability Method) и SORM (Second Order Reliability Method). [1]

Для оценки вероятности P_f широкое распространение получила процедура определения индекса надежности β (индекс безопасности по С.А. Корнелл [2], характеристика безопасности по А.Р. Ржаницын [3], индекс надежности по Раквицу и Фислеру [4]).

В силу нелинейности рассматриваемых моделей результатом статистического моделирования являются распределения выходных переменных модели (предельные значения внутренних усилий, момент трещинообразования, ширина раскрытия трещины, оценка деформаций: прогибы, перемещения), представляющие собой смеси вероятностных распределений. В частности, помимо сингулярности, связанной с появлением трещин, на изменение характера поведения модели под нагрузкой сказываются такие переходы, как достижение зоны текучести и предела текучести растянутой арматуры, причем отдельно для основного сечения и элементов усиления конструкции.

При нелинейном моделировании предопорных зон влияние на изменение характера выходных переменных оказывает также состояние поперечной арматуры и процесс возникновения наклонных трещин под воздействием перерезывающих сил.

Модель, представляющая собой смесь нормальных распределений, задается в виде:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} w_i p(x|i),$$

где $p(x \mid i)$ - нормальное распределение для i-го кластера,

w_i - вес i-го кластера в смеси.

Анализируемая смесь вероятностных распределений характеризуется неопределенностью относительно количества распределений в смеси и ограниченностью объема выборки. Кроме этого распределения в смеси сильно перекрываются, что делает неприменимым алгоритм разделения смеси на основе кластеризации методом k-средних.

Для решения задачи разделения смеси вероятностных распределений, имеющей вышеуказанные особенности, не рекомендуется применение классического EM-алгоритма, основными недостатками которого является, во-первых, высокая чувствительность к выбору первого приближения, во-вторых, неустойчивость. [5, 6]

Также, надо отметить, что EM-алгоритм и его известные модификации требуют значительных вычислительных ресурсов, в частности, адресного пространства для хранения $n \times k$ скрытых переменных и необходимости пересчета значений всех скрытых переменных на каждой итерации алгоритма.

Имеются медианные и стохастические модификации EM-алгоритма, которые делают алгоритм более устойчивым к выбору первого приближения, однако не снимают проблемы связанной с неопределенностью по количеству кластеров. [7]

Нами предложен генетический алгоритм разделения смеси варьирующий количество и параметры компонентов (далее GEM – Genetic EM).

Целью анализа результатов статистического моделирования является поиск вероятностных характеристик функции случайных переменных $Y = g(\mathbf{X})$.

В общем случае, когда речь идет о надежности строительных конструкций, характеристическая функция представляет собой разность случайной величины (в некоторых случаях, суперпозиции случайных величин), описывающей прочность конструкции, и случайной величины (суперпозиции случайных величин в силу линейного характера сочетания усилий) описывающих воздействие на конструкцию.

$Y = g(\mathbf{X}) = X_R - X_S$. Тогда $g(\mathbf{X}) = 0$ представляет собой определение предельного состояния, $g(\mathbf{X}) > 0$ описывает область безопасной эксплуатации и $g(\mathbf{X}) < 0$ – область разрушения конструкции. Вероятности этих событий можно интерпретировать как

$P[g(\mathbf{X}) > 0] = R$ – надежность,

$P[g(\mathbf{X}) < 0] = 1 - R = P_f$ – вероятность разрушения.

В случае если модели входных переменных меняются со временем, говорят, что мы имеем дело с вероятностным процессом, в рамках которого надежность оценивается как функция времени

$$R(t) = P[g(\mathbf{X}(t) > 0)].$$

В результате статистического моделирования мы получаем распределение сопротивления и воздействия. Если исходить из предположения, что закон распределения этих случайных величин является нормальным, то разность этих случайных величин, есть нормально распределенная случайная величина с параметрами:

$\mu_{R-S}=\mu_R-\mu_S$, $\sigma_{R-S}=\sqrt{\sigma_R{}^2+\sigma_S{}^2}$.

Тогда, перейдя к стандартному нормальному распределению, мы имеем

$$P_f=P[R-S<0]=\int_{-\infty}^{0} f_{R-S}(x)dx=\Phi\left(\frac{0-\mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}}\right)=\Phi(-\beta),$$

где β – интерпретируется как индекс надежности.

Исходя из предположения о нормальном законе распределения случайных величин R и S, и независимости случайных величин S и R индекс надежности определяется следующим образом:

$$\beta=-\Phi^{-1}\left(p_f\right)=\frac{m_R-m_S}{\sqrt{s_R^2+s_S^2}}$$

Для более детального описания вероятностной модели применяют переход от одномерной модели воздействия-сопротивления к многомерной модели с n-мерным вектором входных вероятностных параметров (прочностные характеристики материала, геометрические параметры изделий и т.п.).

В этом случае функцию $g(\boldsymbol{X})$ – рассматривают как функцию в n-мерном пространстве. А вектор $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2,\ldots, X_n)^T$ – как n-мерный вектор входных случайных параметров.

В таком случае интеграл вероятности определяется как n-мерный интеграл:

$$P_f=\int_{g(\boldsymbol{x})\leq 0} f_x(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

А в случае, если все параметры представлены независимыми случайными величинами, то объединенная функция распределения плотности вероятности в n-мерном пространстве будет представлять собой произведение функций распределения плотностей вероятности параметров:

$$f_x(\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i)$$

Для упрощения процедуры вычисления искомого интеграла вероятности используют переход к стандартным нормальным распределениям. Такое допущение возможно, если такой переход корректировать на каждом шаге итерационных процессов поиска наиболее вероятной точки области ошибки (разрушения).

В таком случае n-мерный интеграл вероятности будет определен как:

$$P_f=\int_{g(\boldsymbol{u})\leq 0} \varphi_u(\boldsymbol{u})d\boldsymbol{u}=\Phi(-\beta)$$

Геометрически для случая двух переменных проиллюстрируем данный подход на рисунке 2. [8]

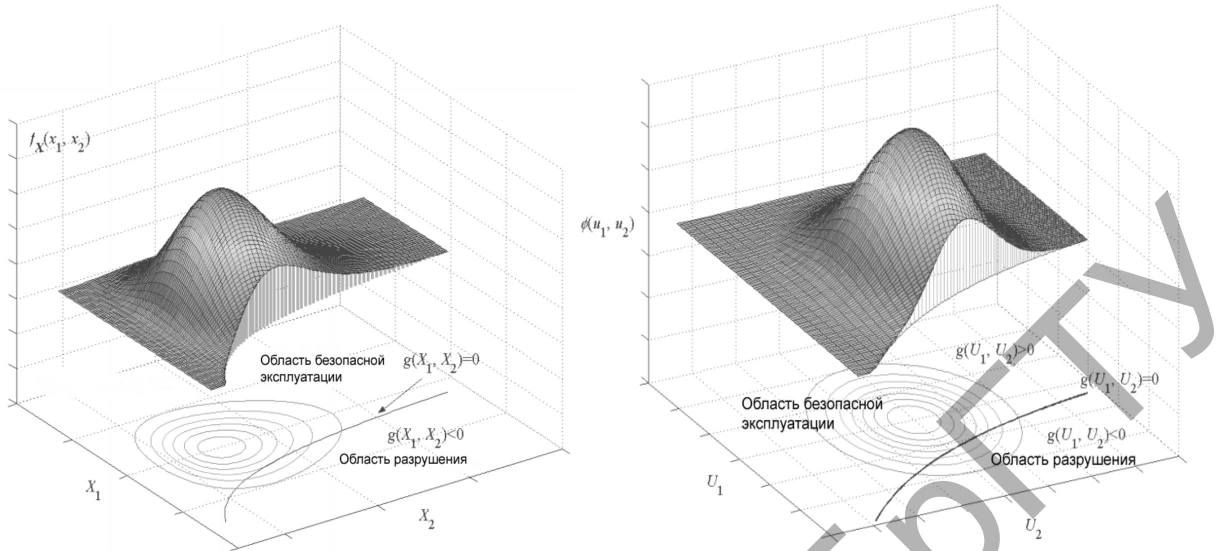

Рисунок 2 – иллюстрация 2-х мерного представления объединенной функции распределения плотности вероятности в пространстве X1, X2 и пространстве стандартных нормальных распределений U1, U2

Для определения вероятности разрушения в пространстве стандартизованных нормальных распределений получили широкое распространение методы, основанные на разложении в ряд Тейлора функции $g(\boldsymbol{u})$. В зависимости от того, сколько членов ряда Тейлора берется во внимание для построения итерационного процесса поиска наиболее вероятной точки границы $g(\boldsymbol{u}) = 0$, различают **FORM** (First order reliability method) и **SORM** (Second order reliability method).

$$g(\boldsymbol{U}) = g(\boldsymbol{u}^*) + \nabla(\boldsymbol{u}^*)(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{u}^*)^T + \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}^*)(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{u}^*)^T,$$

где $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}^*)$ – Гессиан, $\nabla(\boldsymbol{u}^*)$ – градиент функции $g(\boldsymbol{u})$ в точке $\boldsymbol{u}^*$.

$$\nabla(\boldsymbol{u}^*) = \left(\frac{\partial g}{\partial U_1}, \frac{\partial g}{\partial U_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial U_n}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial {U_1}^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial U_1 U_2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial U_1 U_n} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial U_2 U_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial {U_2}^2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial U_2 U_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial U_n U_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial U_n U_2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial {U_n}^2} \end{bmatrix}$$

Поиск наиболее вероятной точки границы выживаемости или проектной точки (в зарубежных источниках **MPP** – Most probable point) осуществляется итерационно. В большинстве публикаций предлагается поиск методом простой итерации с критерием остановки по условию малости изменения оценки индекса надежности. В пространстве стандартизованных нормальных распределений индекс надежности определяется как расстояние от начала координат до проектной точки:

$$\beta = min_{u} \|\boldsymbol{u}\|, \qquad g(\boldsymbol{u}) = 0$$

Методы FORM и SORM применимы в том случае, когда мы имеем возможность построить дифференцируемое аналитическое выражение функции $g(\boldsymbol{u})$. Однако при использовании метода Монте Карло для нелинейных моделей такое условие становится практически не выполнимым.

Для случая применения метода Монте Карло оценка интеграла надежности будет представлять собой отношение количества численных экспериментов, в которых обеспечена прочность элемента, к общему количеству выполненных модельных расчетов.

$$P_f = \frac{n_f}{N}$$

С учетом малости вероятности ошибки (10^{-4}-10^{-6}) для оценки вероятности разрушения требуется объем эксперимента и обработки больших объемов данных.

Нами применен метод построения теоретических распределений по данным меньших объемов, и анализ результатов распределений как гауссовой смеси.

Поскольку нами была выдвинута гипотеза, что результирующее распределение сопротивления, в силу влияния нелинейных эффектов, является смесью нормальных распределений, то решением нелинейной задачи оценки индекса надежности будет являться оценка суммарной вероятности разрушения от каждой компоненты смеси.

Учитывая линейность преобразования Лапласа сумма вероятностей отказа будет представлена следующим образом:

$$v_1\Phi(-\beta_1) + v_2\Phi(-\beta_2) + \ldots + v_m\Phi(-\beta_m) = \Phi(-v_1\beta_1 - v_2\beta_2 - \ldots - v_m\beta_m),$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{m} v_i\beta_i,$$

где $v_1,\ldots,v_m$ – веса компонентов смеси.

Проверка данной гипотезы, путем вычисления непараметрических критериев согласия для смеси гауссовых распределений, должна выполняться всякий раз, когда гипотеза о нормальном распределении функции предельного состояния или иного эффекта от воздействия не подтверждена соответствующий значением критерия согласия (Пирсона, Колмогорова, или других). Пример расчета с разделением смеси показан на рисунке 3. В результате не отвергнутой гипотезе о смеси распределений, вычисленный индекс надежность оказывается выше, чем оценка индекса надежности в предположении отсутствия нелинейных переходов.

Отраженные в данной работе особенности полного нелинейного вероятностного расчета надежности конструктивного железобетонного элемента, методы построения распределения функции предельного состояния и других эффектов от внешнего воздействия реализованы в программе R-Бета. На каждом шаге статистического моделирования выполняется оценка прочности, трещиностойкости, расчет ширины раскрытия трещины и прогиба по нелинейной деформационной модели. Расчет выполняется с использованием диаграмм деформирования материалов, построенных по средним значениям, генерируемым генератором псевдослучайной последовательности в соответствии с выбранным законом распределения.

ПК R-Бета 5.0 включает в себя программу Бета 5.0+, выполняющую расчет по нелинейной деформационной модели в соответствии с нормами ТКП EN 1992-1-1-2009, СНБ 5.03.01-02 Республики Беларусь, СП 52-101-03 и СП 52-102-04 России, Eurocode2, а также по опытным данным.

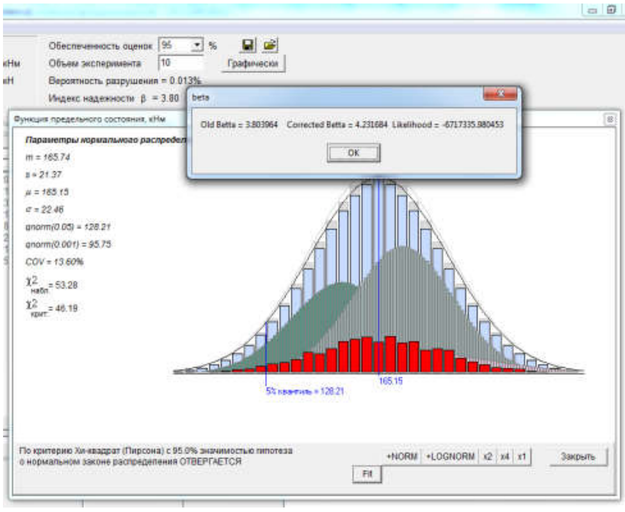

Рисунок 3 – Повышение индекса надежности по результатам разделения смеси Гауссовых распределений с 3.8 до 4.23

Выводы

В результате проведенного исследования выявлена необходимость при анализе результата статистического моделирования в проверке гипотезы, что результирующее распределение является гауссовой смесью. Разработано программное обеспечение, реализующее полный нелинейный вероятностный расчет надежности конструктивного железобетонного элемента Бета 5.0 (c) 2017г. Разработаны программные модули идентификации параметров необходимых теоретических распределений, генераторов необходимых псевдослучайных последовательностей, реализующие Xor-Shift алгоритм с периодом 2^{96}, программные модули оценки критерия согласия Пирсона для нормального и логнормального распределения, ЕМ-алгоритма разделения смеси гауссовых распределений;

Построен алгоритм анализа результатов статистического моделирования основанный на оценке критерия согласия Пирсона и проверке гипотезы о смеси гауссовых распределений, разделении смеси при помощи ЕМ-алгоритма на отдельные компоненты и оценке вклада в интегральный индекс надежности (оценку вероятности разрушения элемента) каждой компоненты смеси.

Список источников

1. Haldar, A., and Mahadevan, S. (2000) Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design, Wiley, New York.

2. Cornell C. A. Bounds on the Reliability of Structural Systems / C. A. Cornell // American Society of Civil Engineers : Journal of the Structural Division ASCE. – February, 1967. – Vol. 93, No. ST. – P. 171–200.

3. Ржаницын А. Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность / А. Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1978. – 239 с.

4. Rackwitz, R., and Fiessler, B. Structural Reliability under Combined Random Load Sequences / Computers and Structures, 9. – 1978. – P.489-494

5. Королёв В. Ю. ЕМ-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений. Теоретический обзор.— М.: Изд- во ИПИРАН, 2007

6. В.Ю. Королёв, Е. В. Непомнящий, А. Г. Рыбальченко, А. В. Виноградова Сеточные методы разделения смесей вероятностных распределений и их применение к декомпозиции волатильности финансовых индексов / Информатика и её применения. – Том 2. – Выпуск 2, 2008. – ISSN 1992-2264. – С.3-18

7. Королев В. Ю. ЕМ-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений. Теоретический обзор — М., ИПИ РАН, 2007. — 94с.

8. Xiaoping Du and Junfu Zhang. "Second-Order Reliability Method with First-Order Efficiency" Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference (2010) Available at: http://works.bepress.com/xiaoping-du/75/