

## ДВУХФАКТОРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ В СТРОИТЕЛЬНЫЙ ПЕРИОД

Курлапов Д.В., Дудурич Б.Б., Коротченко И.А.

**Введение.** Активное применение бетона и железобетона в строительстве ответственных частей зданий и сооружений требует внимания к проблеме обеспечения термической трещиностойкости массивных монолитных конструкций и частей конструкций. В статье проведен анализ степени влияния технологических параметров бетонирования на термонапряженное состояние массивной железобетонной фундаментной плиты энергетического сооружения в строительный период при непрерывном бетонировании фундамента всю высоту одним блоком. Авторами предложены варианты статистической обработки результатов расчетов термической трещиностойкости, позволяющие получить упрощенные математические модели, описывающие функциональные зависимости термонапряженного состояния от технологических параметров процесса бетонирования. По результатам исследования разработаны практические рекомендации, справочные формулы и инженерные графики по безопасному бетонированию фундаментной плиты здания.

Бетон является важнейшим материалом в современном гражданском, промышленном, энергетическом и других видах строительства. Надежность и универсальность, возможность возводить из бетона конструкции всех форм и размеров, в зависимости от их назначения, обеспечивают ему самое широкое распространение в строительной практике. Комбинации состава бетона и добавок позволяют создавать требуемую для конкретного сезона и объекта бетонную смесь.

Однако при применении бетона возникают некоторые сложности, требующие решения. При бетонировании массивных плит тяжелых фундаментов, основным технологическим требованием является непрерывность укладки смеси на всю высоту плиты. Это связано с тем, что укладка бетонной смеси несколькими слоями приводит к образованию рабочих швов, которые ослабляют конструкцию. Кроме того, такой способ бетонирования является наиболее быстрым и выгодным с экономической точки зрения. Проблема возведения бетонного массива на всю высоту заключается в увеличении толщины бетонирования блока и возрастании эффекта саморазогрева бетона, по причине экзотермической реакции твердения бетонной смеси, что приводит к неравномерности распределения температур в массиве, возникновению растягивающих напряжений на поверхности и образованию температурных трещин.

Напряжения и усилия от температурных воздействий возникают в том случае, когда отдельно взятые деформации, вызываемые ими, не удовлетворяют условиям совместности или граничным условиям. Они способны превышать напряжения от основных эксплуатационных нагрузок.

Трещины опасны для бетонных и железобетонных монолитных конструкций, поскольку они способствуют потере прочности и жесткости конструкции, ускорению коррозии арматуры и нарушению герметичности, что недопустимо в гидротехнических сооружениях и в ответственных частях сооружений, таких как фундаменты. Учет этих требований приводит к необходимости принятия мер по существенному уменьшению температурных напряжений для обеспечения условия трещиностойкости железобетонных конструкций.

Исходя из этого, прогнозирование термонапряженного состояния массивных бетонных сооружений является важной задачей для проектирования технологических параметров и режимов твердения бетона во время строительного периода.

В качестве методов влияния на термонапряженное состояние фундаментной плиты используется укрытие поверхности бетона теплоизоляционным материалом, регулирование

температуры бетонной смеси и окружающего воздуха, а также варьирование параметров состава бетонной смеси.

Для достижения поставленной цели решается одномерная задача по определению термонапряженного состояния фундаментной плиты. Расчет термонапряженного состояния бетонного блока проводится с помощью расчётной программы «TERM», разработанной на кафедре СМиСК СПбПУ Петра Великого.

Температурный режим бетонного массива при его возведении формируется под воздействием многих факторов - температур, тепловыделения, инсоляции. В процессе возведения массива и интенсивного тепловыделения цемента происходит значительный нагрев внутренней зоны массива. В результате этого могут возникать большие температурные перепады, которые вызывают значительные растягивающие напряжения и приводят к трещинообразованию.

При решении задачи рассматривается фундаментная плита высотой 2,4 метра из бетона В40 с расходом цемента  $340 \text{ кг/м}^3$ , возводимая в летний период (Рис. 1).

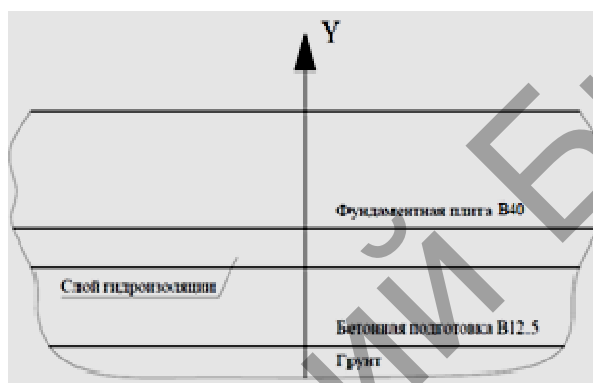


Рисунок 1 - Расчетная схема фундаментной плиты

Плита опирается на слой бетонной подготовки В12,5 по грунтовому основанию. Теплофизические характеристики бетона В40 приняты следующими: теплопроводность бетона  $\lambda=2,67 \text{ Вт/(м}\cdot^{\circ}\text{С)}$ , удельная теплоёмкость  $c=1,0 \text{ кДж/(кг}\cdot^{\circ}\text{С)}$ .

В рамках одномерной задачи расчетная схема фундаментной плиты задается в виде блока, плановые размеры которого значительно превышают толщину (Рис.2). Для определения термонапряженного состояния с помощью метода конечных разностей плита разбивается сеткой по толщине на 10 интервалов с соответствующим шагом 0,24 м, таким образом, в результатах будут представлены значения температур, напряжений и модулей мгновенных деформаций в 11-ти узлах.

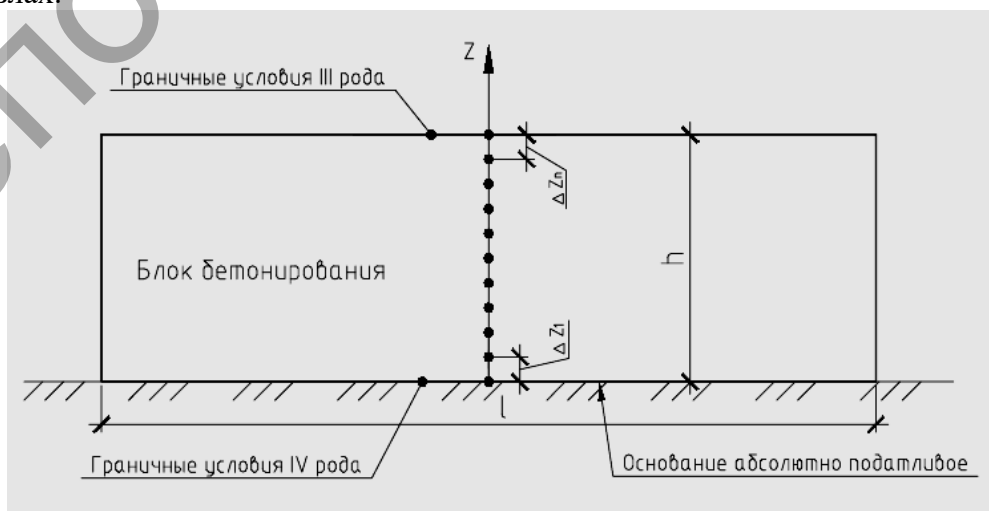


Рисунок 2 - Расчетная схема МКР плиты фундамента

Зависимость модуля упругомгновенных деформаций бетона от времени, принята по данным [1,2]:

$$E(t) = E_{\max}(1 - e^{\alpha t^\gamma}), \quad (1)$$

где  $E_{\max} = 34500$  МПа – предельное значения модуля деформации бетона В35 [2,3];  
 $\alpha = -0,37$ ,  $\gamma = 0,72$  – параметры функциональной зависимости;  
 $t$  – текущее время.

Учет деформаций ползучести бетона в настоящей работе основан на использовании линейной наследственной теории старения. Уравнение связи между напряжениями и деформациями, принимается в виде, предложенном П.И. Васильевым:

$$\sigma(y, t) = \frac{1}{1-\nu} \int_0^t \frac{\partial \varepsilon_n(y, t, \tau)}{\partial \tau} E(y, \tau) \times R(y, t, \tau) d\tau \quad (2)$$

где  $\sigma(y, t)$  – нормальные напряжения в бетоне;  
 $\varepsilon_n(y, t, \tau)$  – деформации, вызванные нормальными напряжениями;  
 $E(y, \tau)$  – модуль упругомгновенных деформаций бетона;  
 $R(y, t, \tau)$  – функция релаксации;  
 $t$  – текущее время;  
 $\tau$  – момент приложения нагрузки.

Функция релаксации при фиксированном значении  $y$  имеет вид:

$$R(t, \tau) = A(1 - e^{-\beta t^\alpha}) + (B_1 + D_1 e^{-\beta t^\alpha}) e^{-\gamma_1(t-\tau)} + (B_2 + D_2 e^{-\beta t^\alpha}) e^{-\gamma_2(t-\tau)}, \quad (3)$$

где параметры функциональной зависимости приняты следующими:  
 $A = 0,7$ ;  $B_1 = 0,2$ ;  $D_1 = 0,4$ ;  $B_2 = 0,1$ ;  $D_2 = 0,3$ ;  $\alpha = 0,67$ ;  $\beta = 3,61 \times 10^{-6} \text{ c}^{-1}$ ;  $\gamma_1 = 1,17 \times 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ ;  
 $\gamma_2 = 2,33 \times 10^{-7} \text{ c}^{-1}$ .

Процесс тепловыделения описывается уравнением И.Д. Запорожца. Параметры уравнения И.Д. Запорожца получены на основе экспериментальных данных по тепловыделению бетона.

Тепловыделение и деформативные характеристики бетона принимаются зависящими от температуры твердения. Учет такого влияния осуществляется согласно гипотезе приведенного времени, в которой реальное время заменяется на некоторое приведенное, являющееся функцией температур твердения. Температурная функция имеет вид:

$$f_T = 2^{\frac{(T_1 - T_2)}{\varepsilon}}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  – характеристическая температурная разность.

В расчетах приняты следующие технологические условия укладки бетонной смеси: бетонная смесь укладывается одним блоком на высоту 2,4 м, температура воздуха лежит в диапазоне 15...25°C, температура бетонной смеси 15...25°C, а также максимальное тепловыделение смеси, зависящие от состава смеси,  $Q_{\max} = 37287 \dots 45573$  ккал/м<sup>3</sup>. В рамках данной статьи рассмотрим два основных фактора – температуру воздуха и температуру бетонной смеси.

После укладки бетонной смеси сверху на нее укладывается теплоизоляция, толщина которой определяется из условия недопущения трещин. В качестве теплоизоляционного материала рассматривается экструдированный пенополистирол различной толщины. Коэффициент теплопроводности данного материала  $\lambda = 0,041$  Вт/м·°C.

Таблица 1 - Предельное значение относительных деформаций

t,сут	1	5	10	15	20	25	30
$\varepsilon_{\lim} * 10^{-5}$	4,11	6,45	7,11	7,62	8,42	8,51	8,6

Для обеспечения термической трещиностойкости необходимо, чтобы максимальные относительные деформации удлинения  $\epsilon_{max}$  не превышали предельных  $\epsilon_{lim}$  (Рис. 3). Для бетона В40 предельное значение максимальных относительных деформаций удлинения  $\epsilon_{lim}$  зависит от времени твердения.

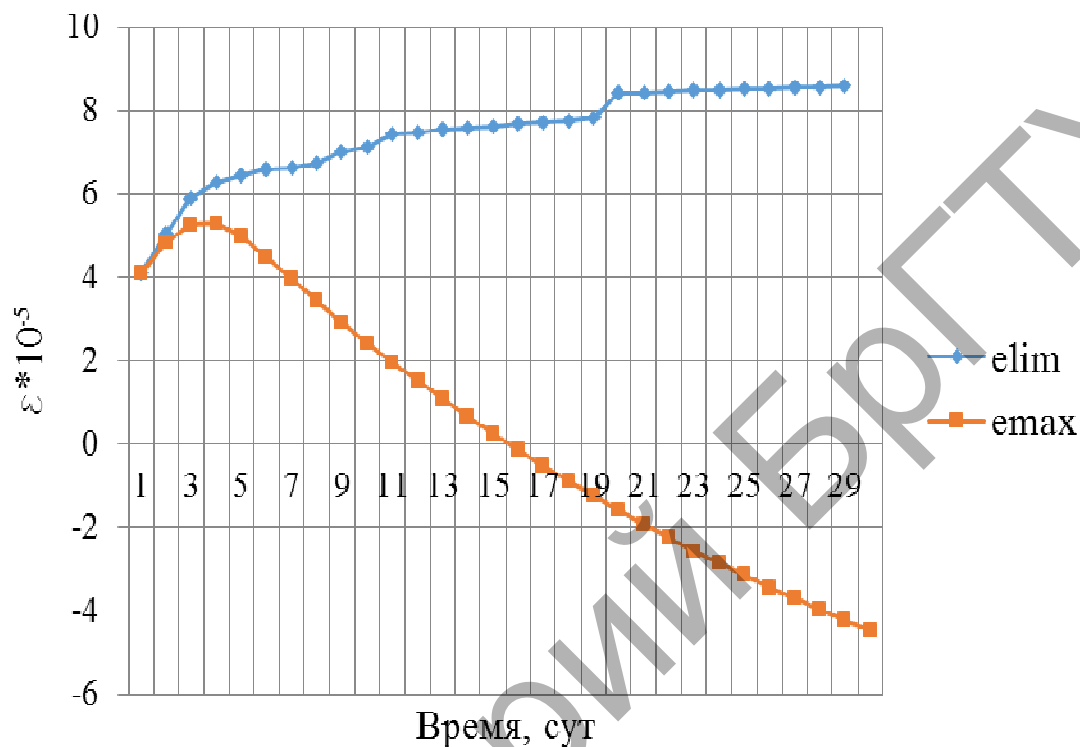


Рисунок 3 - Графики изменения предельных ( $\epsilon_{lim}$ ) и максимальных ( $\epsilon_{max}$ ) относительных деформаций в течение строительного периода

Анализ результатов расчёта термонапряженного состояния на определение функциональных зависимостей производился в программе «STATISTICA».

«STATISTICA» - программный пакет для статистического анализа, реализующий функции анализа данных, управления данными, добычи данных, визуализации данных с привлечением статистических методов [4].

Основным критерием проведения исследований в программе «STATISTICA» является критерий трещиностойкости (отсутствие трещин).

При решении задач с помощью программы «STATISTICA» применяется метод регрессионного анализа.

Перед началом анализа необходимо создать план эксперимента с использованием всех необходимых факторов. Так, например, для  $2^x$  факторов минимально возможный план - 2/1/4 (2 фактора, 1 блок, 4 эксперимента).

Во многих случаях достаточно рассмотреть всего два уровня факторов -  $2^{k-p}$  планы (где k - общее число факторов, p - число факторов из k, порожденных взаимодействиями полного факторного анализа), влияющих на производственный процесс. В некоторых случаях приходится анализировать факторы, имеющие более  $2^x$  уровней ( $3^{k-p}$  планы). Например, если предполагается, что влияние факторов на зависимую переменную не линейное, то необходимо по меньшей мере, 3 уровня для проверки линейных и квадратичных эффектов для этих факторов.

В результате анализа программа выдает статистические данные, поверхности отклика и коэффициенты регрессии, по которым можно составить полиномы. Для достижения целей статьи для анализа были выбраны следующие виды полиномов:

Линейный:  $y_{pred} = b_0 + b_1 * x_1 + \dots + b_n * x_n$ ;

Линейно-квадратичный:  $y_{pred} = b_0 + b_1 * x_1 + b_2 * x_1^2 + \dots + b_n * x_n * x_m$ ;

Экспоненциальный:  $y_{pred} = \exp(b_0 + b_1 * x_1 + \dots + b_n * x_n)$ ;

где  $y_{pred}$  – зависимая величина. В данном случае - это толщина теплоизоляции -  $\delta_{изол}$ ;

$x_n$  - значения факторов;

$b_n$  - соответствующие коэффициенты полинома;

$b_0$  - свободный член.

Перед началом расчёта, как упоминалось ранее, в программе «STATISTICA» были составлен план эксперимента для  $2^x$  факторного анализа это температура бетонной смеси -  $T_{бет}$  и воздуха -  $T_{возд}$ .

Разработанный подход к расчёту термонапряженного состояния проиллюстрируем на примере базового двухфакторного плана без взаимодействия факторов.

Таблица 2 - План эксперимента для  $2^x$ уровневого  $2^x$  факторного анализа 2/1/4

№	$T_{бет}, ^\circ C$	$T_{возд}, ^\circ C$
1	15	15
4	25	25
2	25	15
3	15	25

Оценка эффектов представлена в табл. 3. Первая колонка чисел в таблице результатов содержит оценки эффектов. Оценки этих параметров могут быть проинтерпретированы как отклонения среднего для отрицательных установок от среднего для положительных установок соответствующих факторов.

Таблица 3 - Оценки эффектов для двухфакторного двухуровневого плана 2к-р без взаимодействий

Фактор	Эффект	Ст.Ош.
Сред/Св.член	7.675	0.275
(1) $T_{бет}$	10.750	0.550
(2) $T_{возд}$	-1.550	0.550

Так, например, когда изменится температура бетонной смеси  $T_{бет}$  с минимального (+15 $^\circ C$ ) на максимальное (+25 $^\circ C$ ) толщина необходимой теплоизоляции увеличится в среднем на 10,75 см. Если же изменится температура воздуха  $T_{возд}$  с минимального (+15 $^\circ C$ ) на максимальное (+25 $^\circ C$ )толщина необходимой теплоизоляции уменьшится в среднем на 1,55 см, что обусловлено уменьшением разности температур между разогревающимся массивом и окружающей средой.

Наглядной иллюстрацией, отображающей эффекты в порядке значимости, является карта Парето (Рис. 3).

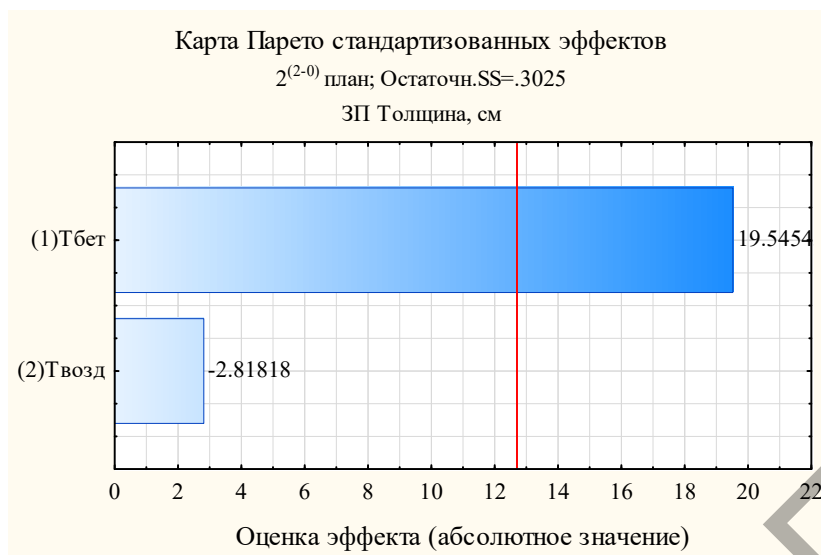


Рисунок 3 - Карта Парето для двухфакторного двухуровневого плана  $2^{k-p}$  без взаимодействий

Итак, фактор  $T_{бет}$  даёт значимый эффект. Соответствующая ему колонка пересекает вертикальную линию, которая представляет 95% доверительную вероятность.

Несколько более технической диаграммой, содержащей подобную, но большую информацию, является нормальный вероятностный график (Рис. 4).

Если действительные оценки (расположенные на оси X) распределены нормально, то все значения лягут на прямую линию графика. График очень удобен для отделения случайного шума от действительных эффектов. Незначимые эффекты будут показаны на графике как нормально распределенные вокруг нуля величины; истинно значимые эффекты будут представлены на графике как выпадающие значения.

Конечно, в случае только двух факторов несколько трудно оценить выпадение фактора  $T_{бет}$ , но в следующих планах при большем числе факторов этот будет более ярко выражено.

Здесь следует отметить близкое к единице значение коэффициента детерминации  $R^2=0.997$  и скорректированный коэффициент  $R_{скор}^2=0.992$ , которые показывают высокое качество подгонки регрессионной модели к наблюдаемым значениям.

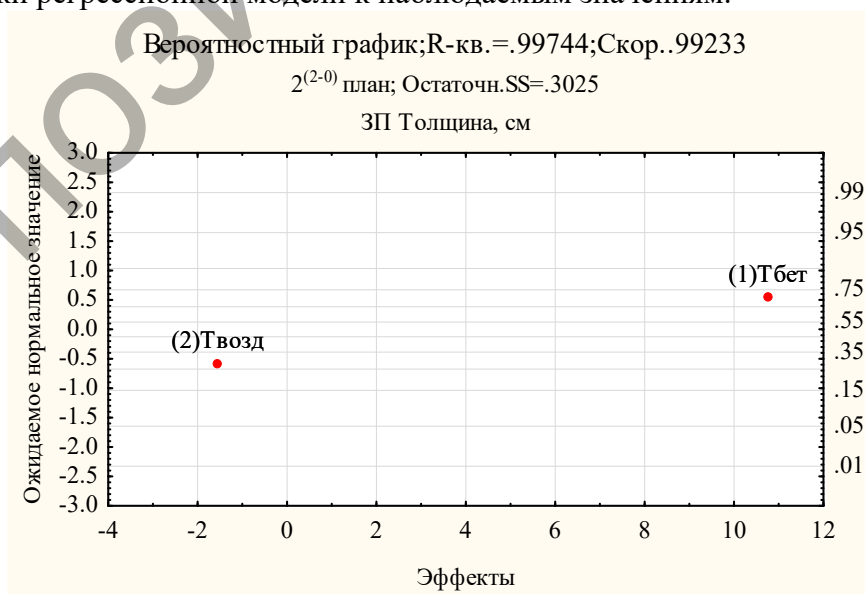


Рисунок 4 - Вероятностный график для двухфакторного двухуровневого плана  $2^{k-p}$  без взаимодействий

Рассмотрим таблицу регрессионных коэффициентов (Табл. 4).

Таблица 4 - Регрессионные коэффициенты для двухфакторного двухуровневого плана  $2^{k-p}$  без взаимодействий

Фактор	Регрес.	Ст.Ош.
Сред/Св.член	-10.725	1.579755
(1) $T_{бет}$	1.075	0.055000
(2) $T_{возд}$	-0.155	0.055000

Согласно первому столбцу таблицы полином будет иметь следующий вид:

$$\delta_{изол} = -10,75 + 1,075 * T_{бет} - 0,155 * T_{возд} \quad (5)$$

Наблюдаемые (опорные) и предсказанные значения лежат достаточно близко и разнятся не более, чем на 15% (Рис. 5). Иллюстрацией полученного полинома является поверхность отклика в виде плоскости (Рис. 6).

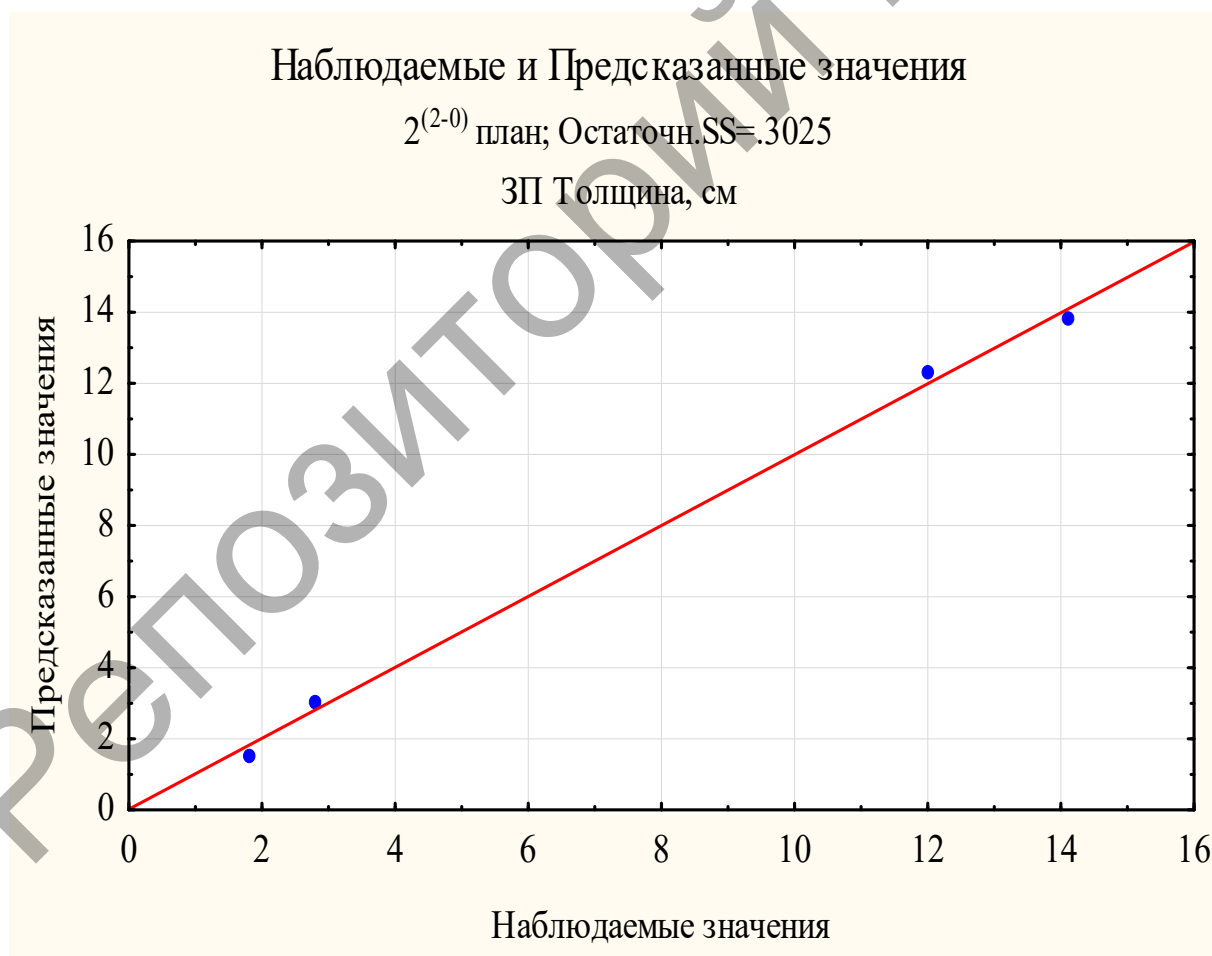


Рисунок 5 - Наблюдаемые и предсказанные значения для двухфакторного двухуровневого плана  $2^{k-p}$  без взаимодействий

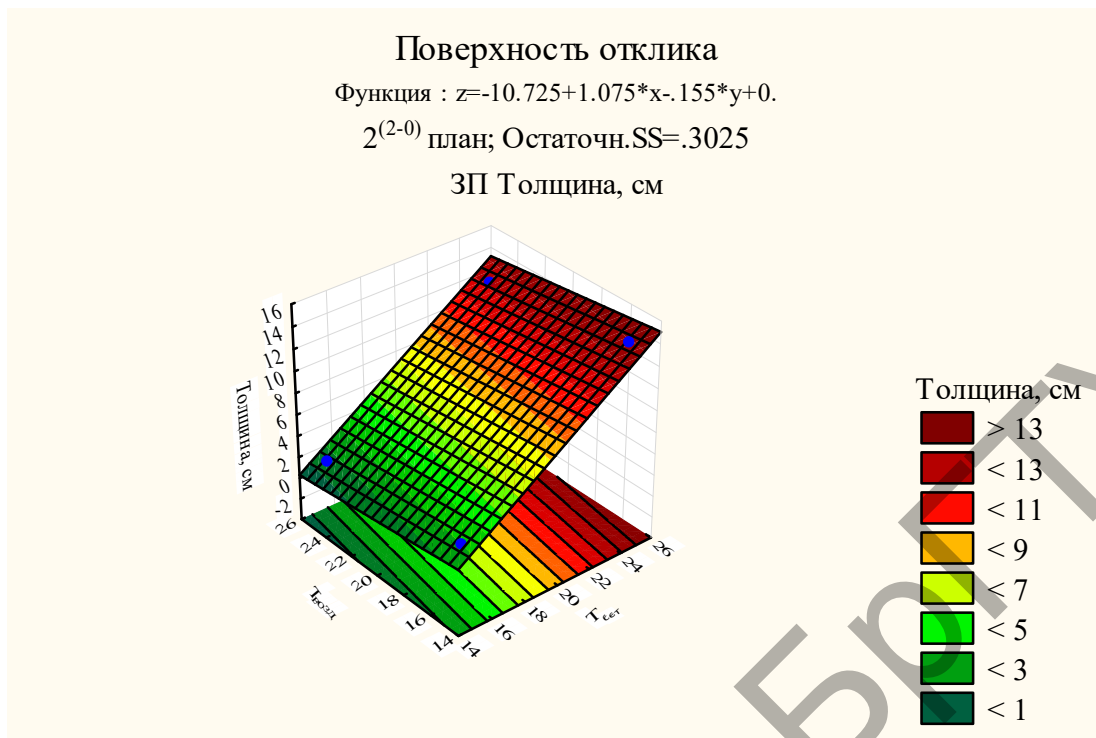


Рисунок 6 - Поверхность отклика для двухфакторного двухуровневого плана  $2^{k-p}$  без взаимодействий

Практически более применимой будет являться проекция поверхности на горизонтальную плоскость (Рис. 7).

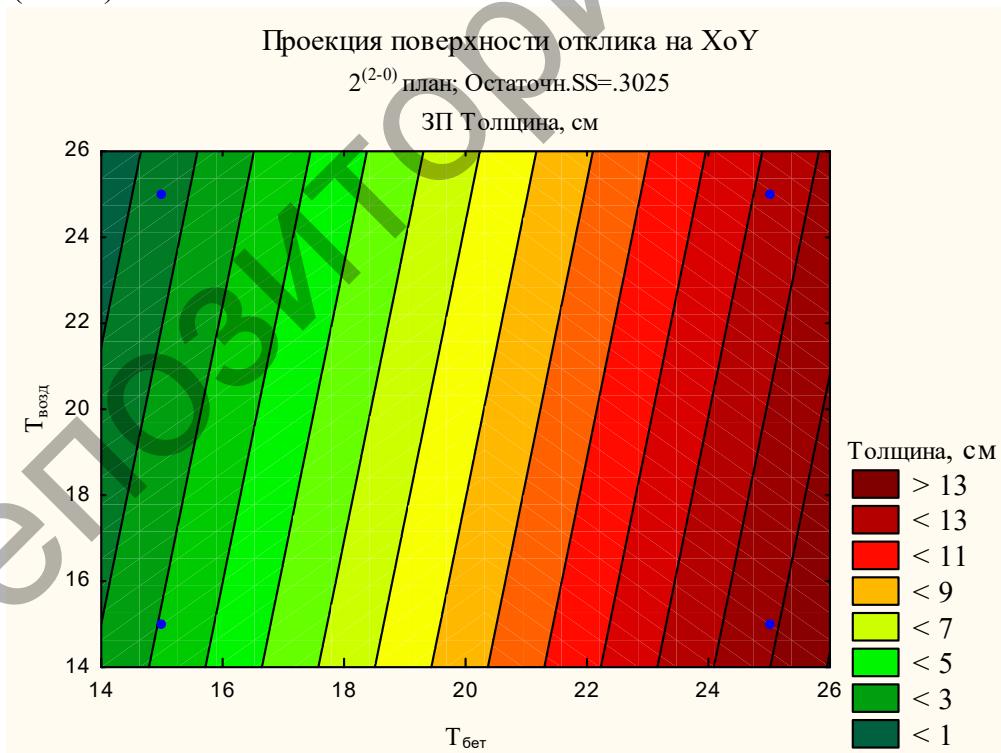


Рисунок 7 - Проекция поверхности отклика для двухфакторного двухуровневого плана  $2^{k-p}$  без взаимодействий

Данная плоскость поделена цветными областями, которые ограничивают определенные значения искомой величины -  $\delta_{\text{изол}}$ . Откладывая по вертикальной и горизонтальной оси фак-



тические значения  $T_{бет}$  и  $T_{возд}$  и пересекая их, по цветовой шкале будем получать необходимую толщину теплоизоляции. Данный полином и номограмма могут быть применены при быстром подборе теплоизоляции на строительной площадке.

#### **Выводы:**

1. Термическая трещиностойкость без использования теплоизоляции не обеспечена для всех рассматриваемых вариантов. Необходимо устройство теплоизоляции;

2. Необходимая толщина теплоизоляции при использовании экструдированного пенополистирола с  $\lambda=0,041$  Вт/ м·°С находится в пределах 1,8...14,1 см в зависимости от температур воздуха и бетонной смеси;

3. В рассмотренном эксперименте наибольшее влияние на толщину теплоизоляции оказывает температура бетонной смеси  $T_{бет}$ ;

4. Полученные линейные прогнозные модели показывают низкую сходимость с наблюдаемыми значениями искомого фактора (согласно «TERM»), относительная разница лежит в пределах 22%, что в абсолютном эквиваленте составляет порядка 1,5 см;

5. Использование взаимодействий между факторами позволило устранить расхождение предсказанных и наблюдаемых значений на опорных точках, но не дало ощутимого выигрыша в их промежутке;

6. Полученные номограммы позволяют примерно оценить необходимую толщину теплоизоляции.

**Заключение.** Планы  $2^{k-p}$  наиболее часто используются в промышленности. Вклад большого числа факторов в производственный процесс может быть оценен относительно эффективно (т.е. с помощью небольшого числа опытов). Логика экспериментов такого рода весьма проста (каждый фактор имеет только два уровня), а с помощью «STATISTICA» построение плана и анализ таких экспериментов занимают секунды. Однако, простота этих планов является их главным недостатком. Как было отмечено ранее, основанием для использования двухуровневых факторов является убеждение в том, что изменения зависимой переменной линейны по своей природе. Часто это не выполняется, то есть многие переменные связаны нелинейным образом. Другим недостатком дробных планов является предположение о том, что взаимодействия высоких порядков отсутствуют, но иногда они действительно присутствуют. Например, если некоторые другие факторы установлены так, что оказывают отрицательное влияние на зависимую величину. Однако, в дробных факторных планах взаимодействия высоких порядков (выше двух), как правило, не будут обнаружены.

#### **Список источников**

1. Курлапов Д.В., Тюкаев В.В. Железобетонные и каменные конструкции. Учебник для курсантов и студентов. – СПб.: ВИ(ИТ) ВАМТО, 2015.

2. Прокопович И.Е. Влияние длительных процессов на напряженное состояние сооружений. – М.: Стройиздат. 1978. – 299 с. (НИИЖБ).

3. СП 63.13330.2012. «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003». (утв. приказом Министерства регионального развития РФ от 29.12.2011 N 635/8). Дата актуализации: 21.05.2017.

4. STATISTICA. Электронный учебник [сайт] / URL: [http:// statsoft.ru /home /textbook /default.htm](http://statsoft.ru/home/textbook/default.htm) (12.12.2016).