

Рисунок 10 – Деформированное состояние конструктивной системы с активированными пластическими шарнирами (шаг 8)

со свойствами, представленными на рис. 8 (т. к. разрушение плиты происходит от изгиба, шарнирами среза было принято решение пренебречь для данного расчёта). На рис. 9 представлен общий вид описанного фрагмента с приложенными узловыми нагрузками и с врезанными по правилам пластическими шарнирами в балочные элементы. Нагружение производится пошагово с контролем перемещения на каждом этапе. Деформированное состояние конструктивной системы на 8 шаге с активированными пластическими шарнирами представлено на рис. 10. Сравнение зависимостей “сила-перемещение” полученных по результатам испытаний и с помощью численного моделирования (для узла 450) показано на рис. 11.

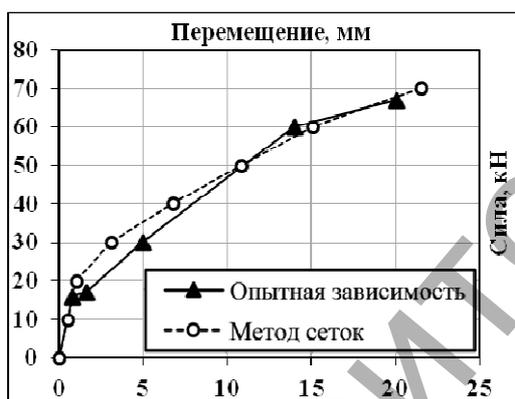


Рисунок 11 – Сравнение зависимостей “сила-перемещение”, полученных по результатам испытаний [5] и по методу сеток

**Заключение.** Из результата сравнения видно, что метод сеток позволил для данной задачи с некоторыми допущениями смоделировать работу плиты, близкую к эксперименту. Однако стоит отметить,

что существует перечень характеристик, требующих уточнения (жёсткость элементов сетки, длины пластических шарниров). Стоит так же сказать, что данная задача была рассчитана с помощью деформационной модели слоёв, однако не показала даже близкого сходства (на всех стадиях нагружения реакция линейная). Это, возможно, связано с тем, что программа после образования линейного пластического шарнира воспринимает плоский элемент, опирающийся на две шарнирные опоры, как механизм, однако если рассматривать напряжено-деформированное состояние слоя верхней арматуры под нагрузкой, то в данном слое нелинейность присутствует. Таким образом, можно сделать вывод о том, что метод сеток может быть применим для определения нелинейной реакции конструктивной системы.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Проектирование конструкций из бетона. Общие правила для зданий: ТКП EN 1992-1-1 (EC2) (IDT: EN 1992-1-1:2004: Design of Concrete Structures. General rules and rules for buildings). – 276 p.
2. CORTI G. Grid model for the non-linear behavior of R/C flat-slab subjected to gravity and lateral loads. – 2010.
3. Coronelli D. Grid model for flat-slab structures // ACI Structural Journal. – 2010. – Т. 107. – № 6. – С. 645.
4. ACI Committee 318. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05) and Commentary (318R-05). American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2005.
5. Hamdy K. Shehab, Ahmed S. Eisa, and Kareem A. El-Awady. Strengthening of Cutouts in Existing One-Way Spanning R. C. Flat Slabs Using CFRP Sheets// International Journal of Concrete Structures and Materials. ISSN 1976-0485 / eISSN 2234-1315. – 2017. – Vol.11. – № 2. – P. 327—341.
6. SAP 2000 v. 14.0 “Linear and Nonlinear Static and Dynamic Analysis and Design of Three-Dimensional Structures”. Computers and Structures, Inc. – Berkley, California, USA, June, 2009.

Материал поступил в редакцию 28.01.2018

**TUR A.V., LIZAHUB A.A., HORBAT Y.V. The use of the grid method for determining the nonlinear reaction in monolithic flat plates**

The article deals with the problem of nonlinear calculation of structural systems with monolithic flat slabs. As a method, the grid model was selected and analyzed from the point of view of its further use for the calculation of the progressive collapse.

УДК 691.327

**Кравченко В.В.**

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦЕМЕНТНЫХ КОМПОЗИТНЫХ СИСТЕМ

**Введение.** Цементный камень, при наличии в его структуре зерен обычного или гранул пористого заполнителя, представляет со-

бой типичный композиционный материал, состоящий из двух и более компонентов (фаз).

**Кравченко В.В.,** старший преподаватель кафедры технологии бетона и строительных материалов Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Основной задачей при проектировании состава композиционного материала является прогнозирование заданных свойств композита, учитывая неоднородность его структуры.

Определение свойств композиционных материалов, как правило, решается с помощью различных методов гомогенизации, суть которых заключается в получении усредненных, так называемых эффективных характеристик композита на основе локальных характеристик компонентов (фаз), слагающих структуру композиционного материала.

В основе методов гомогенизации лежит принцип замены фактического неоднородного состояния структуры композиционного материала эквивалентным гомогенным состоянием, так называемой – эффективной средой.

С этой целью композиционный материал обычно разделяют на составные элементарные гетерогенные уровни, на которых его неоднородная структура условно рассматривается как однородная, что позволяет при рассмотрении напряженно-деформированного состояния на каждом элементарном уровне применять положения механики сплошных сред.

Элементарные гетерогенные уровни определяются при рассмотрении строения структуры композита, с последующей передачей информации от нижнего гетерогенного уровня к более высокому гетерогенному уровню композитной системы. Гетерогенный уровень композиционного материала может состоять из компонентов (фаз), различный по геометрическим и физико-механическим характеристикам.

По данным [1] определение эффективных характеристик композита включает три основных принципа – представление, локализация и гомогенизация.

Представление композитной системы – многоуровневая схема, включающая описание или схематическое представление каждого ее гетерогенного уровня, с указанием идентификации, морфологии и геометрических размеров всех фаз, в репрезентативном элементарном объеме.

Например, бетон – как композиционный материал, можно представить в виде трех гетерогенных уровней:

- уровень 1 – представляет собой твердую фазу цементной матрицы, образованную продуктами гидратации и зернами непрореагировавшего цемента, характерный размер фаз на уровне выражается в нм;
- уровень 2 – представляет собой цементную матрицу, состоящую из твердой фазы и капиллярной пористости, характерный размер фаз на уровне выражается в мкм;
- уровень 3 – представляет собой непосредственно бетонный композит, состоящий из цементной матрицы, транзитной зоны и заполнителя, характерный размер фаз на уровне выражается в мм.

**Методы теории эффективной среды.** На данный момент существует большое количество методов аппроксимации эффективной среды, начиная с моделей Фогта и Рейсса, которые были предложены авторами еще в первой половине прошлого столетия.

Наиболее распространенными методами, которые активно применяются для определения жесткостных характеристик цементных композитных систем, являются:

- метод SCS [2-4];
- метод МТ [5, 6].

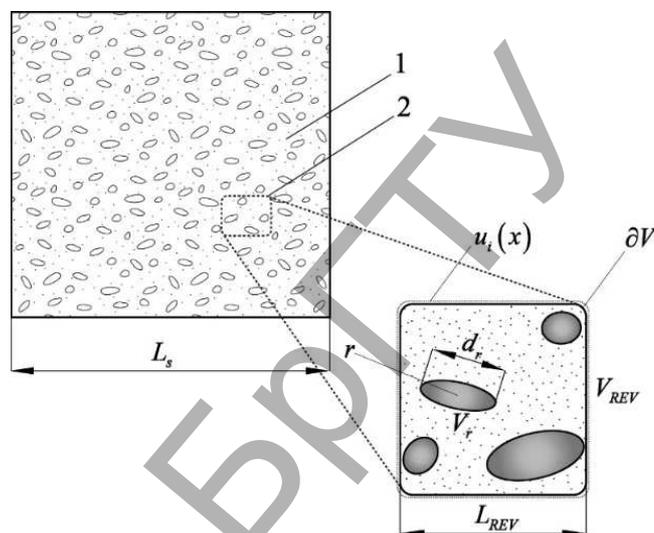
В основе данных методов гомогенизации жесткостных характеристик лежат положения, устанавливающие взаимосвязь между напряженно-деформированным состоянием на двух размерных уровнях композитной системы – микро- и макроуровне. Данная взаимосвязь напряженно-деформированных состояний имеет термин – локализация (иногда вместо данного термина используется термин – концентрация) [1].

Микроуровень – представляет собой совокупность компонентов (фаз), заполняющих гетерогенный уровень структуры композиционного материала, масштаб размеров которого равен характерному размеру компонентов (фаз). Характеристики напряженно-деформированного состояния на микроуровне рассматриваются применительно к компонентам (фазам) структуры композиционного материала.

Макроуровень – представляет собой гетерогенный уровень структуры композиционного материала, масштаб размеров которого

сопоставим с размерами REV. Характеристики напряженно-деформированного состояния на макроуровне рассматриваются применительно к композиционному материалу в целом.

Таким образом, можно сформулировать, что микроуровень – это размерный уровень фаз, входящих в состав REV, а макроуровень – это непосредственно REV в целом (рис. 1).



1 – композиционный материал, 2 – репрезентативный элементарный объем,  $r$  – отдельная фаза в репрезентативном элементарном объеме  
**Рисунок 1** – Схема разделения уровней в композитной системе

Основным положением локализации является понятие гомогенных граничных условий, действующих на поверхности контура  $\partial V$  REV. Гомогенные граничные условия описывают связь между перемещением всех точек поверхности контура  $\partial V$  REV (макроуровень) с усредненной деформацией каждой его  $r$ -ой фазы (микроуровень) [7]:

$$u_i(x) = \langle \varepsilon_{ij}(x) \rangle_{V_{REV}} x_j; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}(x) \rangle_{V_{REV}} &= \frac{1}{V_{REV}} \cdot \int_{V_{REV}} \varepsilon_{ij}(x) \cdot dV = \\ &= \frac{1}{V_{REV}} \cdot \sum_r \int_{V_r} \varepsilon_{ij}^r(x) \cdot dV = \sum_r f_r \langle \varepsilon_{ij}^r(x) \rangle_{V_r}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u_i(x)$  – вектор перемещения точек на поверхности контура  $\partial V$  REV,  $x \in \partial V$ ;

$\langle \varepsilon_{ij}(x) \rangle_{V_{REV}}$  – тензор усредненных деформаций REV;

$x_j$  – вектор координат точек на поверхности контура  $\partial V$ ;

$V_{REV}$  – объем REV, [м<sup>3</sup>];

$\varepsilon_{ij}(x)$  – локальный тензор деформаций REV;

$\varepsilon_{ij}^r(x)$  – локальный тензор деформаций  $r$ -й фазы;

$V_r$  – объем  $r$ -ой фазы, [м<sup>3</sup>];

$f_r$  – объемная доля  $r$ -й фазы включения, [-];

$\langle \varepsilon_{ij}^r(x) \rangle_{V_r}$  – тензор усредненных деформаций  $r$ -й фазы.

Выражение (2) представляет собой зависимость для определения усредненных характеристик в REV, исходя из характеристик отдельных фаз и их количества.

Посредством гомогенных граничных условий устанавливают связь между усредненными деформациями (напряжениями) каждой  $r$ -й фазы (микроуровень) с усредненными деформациями (напряжениями) REV (макроуровень) через условие линейной локализации деформаций (напряжений):

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{V_r} = \langle A_{ijkl} \rangle_{V_r} \langle \varepsilon_{kl} \rangle_{V_{RVE}}; \quad (3)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{V_r} = \langle B_{ijkl} \rangle_{V_r} \langle \sigma_{kl} \rangle_{V_{RVE}} \quad (4)$$

или в инвариантной форме записи:

$$\bar{\varepsilon}_r = \mathbf{A}_r \cdot \bar{\varepsilon}; \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}_r = \mathbf{B}_r \cdot \bar{\sigma}, \quad (6)$$

где  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{V_r}$ ,  $\bar{\varepsilon}_r$  и  $\langle \sigma_{ij} \rangle_{V_r}$ ,  $\bar{\sigma}_r$  – соответственно тензор усредненных деформаций и напряжений  $r$ -й фазы;

$\langle A_{ijkl} \rangle_{V_r}$ ,  $\mathbf{A}_r$  и  $\langle B_{ijkl} \rangle_{V_r}$ ,  $\mathbf{B}_r$  – соответственно локализационный тензор 4 ранга деформаций и напряжений  $r$ -й фазы;

$\langle \varepsilon_{kl} \rangle_{V_{RVE}}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  и  $\langle \sigma_{kl} \rangle_{V_{RVE}}$ ,  $\bar{\sigma}$  – соответственно тензор усредненных деформаций и напряжений REV.

По данным [8, 9], учитывая морфологию фаз, входящих в структуру цементной матрицы, для определения локализационного тензора деформаций наиболее применима модель, в которой отдельная фаза является – эллипсоидальным включением Эшелби [10], помещенным в базовую среду. В случае с эллипсоидальным включением полученные решения Эшелби являются общими, на основе которых получают частные решения для отдельной фазы в форме сферы, обычного или эллиптического цилиндра, плоского диска и ряда других.

В общем случае локализационный тензор деформаций  $r$ -й фазы может быть представлен в следующем виде [1]:

$$\mathbf{A}_r = (\mathbf{I} + \mathbf{P}_r \cdot (\mathbf{C}_0^{-1} \cdot \mathbf{C}_r - \mathbf{I}))^{-1} \cdot [(\mathbf{I} + \mathbf{P}_r \cdot (\mathbf{C}_0^{-1} \cdot \mathbf{C}_r - \mathbf{I}))^{-1}]^{-1} \quad (7)$$

где  $\mathbf{A}_r$  – локализационный тензор деформаций 4 ранга  $r$ -ой фазы;

$\mathbf{I}$  – единичный тензор 4 ранга;

$\mathbf{P}_r$  – тензор Эшелби 4 ранга  $r$ -й фазы;

$\mathbf{C}_0$  – тензор упругости 4 ранга базовой среды;

$\mathbf{C}_r$  – тензор упругости 4 ранга  $r$ -й фазы.

Применительно к цементным композитным системам определение тензоров упругости и Эшелби основывается на двух следующих допущениях.

Во-первых предполагают, что базовая среда и  $r$ -я фаза являются изотропной средой, поэтому их тензоры упругости могут представлены в следующем виде:

$$\mathbf{C}_0 = 3K_0 \mathbf{J} + 2G_0 \mathbf{K}; \quad (8)$$

$$\mathbf{C}_r = 3K_r \mathbf{J} + 2G_r \mathbf{K}, \quad (9)$$

где  $K_0$  и  $G_0$  – соответственно модуль объемных деформаций и модуль сдвига базовой среды;

$K_r$  и  $G_r$  – соответственно модуль объемных деформаций и модуль сдвига  $r$ -й фазы;

$\mathbf{J}$  – шаровая часть единичного тензора 4 ранга;

$\mathbf{K}$  – девиаторная часть единичного тензора 4 ранга.

Во-вторых геометрическую форму  $r$ -й фазы представляют в виде сферы, для которой тензор Эшелби имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}_r = \alpha_0 \mathbf{J} + \beta_0 \mathbf{K}, \quad (10)$$

$\alpha_0$  и  $\beta_0$  – коэффициенты, учитывающие геометрическую форму  $r$ -й фазы.

Для  $r$ -й фазы, имеющей сферическую форму, коэффициенты  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  определяют по следующим зависимостям [8, 9]:

$$\alpha_0 = \frac{3 \cdot K_0}{3 \cdot K_0 + 4 \cdot G_0}; \quad (11)$$

$$\beta_0 = \frac{6 \cdot (K_0 + 2 \cdot G_0)}{5 \cdot (3 \cdot K_0 + 4 \cdot G_0)}. \quad (12)$$

Процедура гомогенизации жесткостных характеристик основана на линейном отношении, связывающим усредненные напряжения и деформации на макроуровне, посредством эффективного тензора упругости:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{V_{RVE}} = \langle C_{ijkl} \rangle_{V_{RVE}} \langle \varepsilon_{kl} \rangle_{V_{RVE}}, \quad (13)$$

или в инвариантной форме записи:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{C}_{\text{hom}} \cdot \bar{\varepsilon}, \quad (14)$$

где  $\mathbf{C}_{\text{hom}}$  эффективный тензор упругости.

Усредненные напряжения на макроуровне определяются по зависимости (2):

$$\bar{\sigma} = \sum_r f_r \bar{\sigma}_r \quad (15)$$

Усредненные напряжения на микроуровне, аналогично могут быть линейно связаны с усредненными деформациями:

$$\bar{\sigma}_r = \mathbf{C}_r \cdot \bar{\varepsilon}_r. \quad (16)$$

Таким образом, исходя из (5) и (16), получают зависимость для определения эффективного тензора упругости на макроуровне:

$$\bar{\sigma} = \sum_r f_r (\mathbf{C}_r \cdot \bar{\varepsilon}_r) = \sum_r f_r (\mathbf{C}_r \cdot \mathbf{A}_r) \cdot \bar{\varepsilon}; \quad (17)$$

$$\mathbf{C}_{\text{hom}} = \sum_r f_r (\mathbf{C}_r \cdot \mathbf{A}_r). \quad (18)$$

Ключевым отличием методов SCS и МТ друг от друга является отличие в базовой среде.

Базовая среда – либо непосредственно эффективная среда, или отдельная фаза композитной системы, в структуре которой распределены все ее остальные фазы. Если в качестве среды приведения выступает отдельная фаза композитной системы, такую фазу принято обозначать как матрицу, остальные фазы – включениями.

Для метода SCS базовой средой является эффективная среда, а для метода МТ-матрица:

$$\text{Метод SCS: } \mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_{\text{hom}}; \quad (19)$$

$$\text{Метод МТ: } \mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_m, \quad (20)$$

где  $\mathbf{C}_m$  тензор упругости матрицы в REV.

Исходя из определения базовой среды, по данным [8], метод МТ рекомендуют применять для определения эффективных жесткостных характеристик композитных систем, структура которых имеет ярко выраженную морфологию «матрица – включение», а метод SCS – соответственно для композитных систем, которые имеют неупорядоченную структуру, фазы в которых распределены случайным образом.

Учитывая ранее сделанное допущение о том, что базовая среда и  $r$ -я фаза являются изотропными средами, можно сделать вывод, что эффективная среда также является изотропной средой, для которой тензор  $\mathbf{C}_{\text{hom}}$  можно выразить в следующем виде:

$$\mathbf{C}_{\text{hom}} = 3K_{\text{hom}} \mathbf{J} + 2G_{\text{hom}} \mathbf{K}, \quad (21)$$

где  $K_{\text{hom}}$  – эффективный модуль объемных деформаций композитной системы;

$G_{\text{hom}}$  – эффективный модуль сдвига композитной системы.

На основании зависимостей (18) и (21) получают следующую систему уравнений для определения эффективных жесткостных характеристик композитной системы [8, 9]:

$$K_{\text{hom}} = \sum_r f_r \cdot K_r \cdot \left( 1 + \alpha_0 \cdot \left( \frac{K_r}{K_0} - 1 \right) \right)^{-1} \times \left[ \sum_r f_r \cdot \left( 1 + \alpha_0 \cdot \left( \frac{K_r}{K_0} - 1 \right) \right)^{-1} \right]; \quad (22)$$

$$G_{\text{hom}} = \sum_r f_r \cdot G_r \cdot \left( 1 + \beta_0 \cdot \left( \frac{G_r}{G_0} - 1 \right) \right)^{-1} \times \left[ \sum_r f_r \cdot \left( 1 + \beta_0 \cdot \left( \frac{G_r}{G_0} - 1 \right) \right)^{-1} \right]. \quad (23)$$

Для двухфазных композитных систем с морфологией структуры «матрица – включение» эффективные жесткостные характеристики могут быть определены исходя из геометрической модели, получившей название – модель единичной концентрации, в которой сферическое включение в единичной концентрации помещено: (а) в эффективную среду (метод SCS) или (б) в фазу матрицы (метод МТ).

Эффективный тензор упругости, для рассматриваемой двухфазной композитной системы, определяют следующим образом [7]:

$$C_{\text{hom}} = C_m + f_{\text{inc}} (C_{\text{inc}} - C_m) \cdot A_{\text{inc}}, \quad (24)$$

где  $C_m$  и  $C_{\text{inc}}$  соответственно тензор упругости 4 ранга фазы матрицы и включения;

$f_{\text{inc}}$  – объемная доля включения в композитной системе;

$A_{\text{inc}}$  – локализационный тензор деформаций 4 ранга включения.

Локализационный тензор деформаций для рассматриваемой двухфазной композитной системы определяется по следующим зависимостям [7]:

Метод SCS:  $A_{\text{inc}} = [P_{\text{hom}} \cdot (C_{\text{hom}}^{-1} \cdot C_{\text{inc}} - I) + I]^{-1}; \quad (25)$

Метод МТ:  $A_{\text{inc}} = A_{\text{inc}}^{\text{dil}} \cdot ((1 - f_{\text{inc}}) I + f_{\text{inc}} A_{\text{inc}}^{\text{dil}})^{-1}, \quad (26)$

где  $P_{\text{hom}}$  – эффективный тензор Эшелби 4 ранга композитной системы;

$A_{\text{inc}}^{\text{dil}}$  – локальный тензор деформаций 4 ранга сферического включения в модели единичной концентрации.

Эффективные жесткостные характеристики рассматриваемой двухфазной композитной системы определяют решением следующих уравнений:

Метод SCS [4]:

$$\frac{f_m \cdot K_m}{K_m + \frac{4}{3} \cdot G_{\text{hom}}} + \frac{f_{\text{inc}} \cdot K_{\text{inc}}}{K_{\text{inc}} + \frac{4}{3} \cdot G_{\text{hom}}} + 5 \cdot \left( \frac{f_m \cdot G_{\text{inc}}}{G_{\text{hom}} - G_{\text{inc}}} + \frac{f_{\text{inc}} \cdot G_m}{G_{\text{hom}} - G_m} \right) + 2 = 0; \quad (27)$$

$$\frac{1}{K_{\text{hom}} + \frac{4}{3} \cdot G_{\text{hom}}} = \frac{1 - f_{\text{inc}}}{K_m + \frac{4}{3} \cdot G_{\text{hom}}} + \frac{f_{\text{inc}}}{K_{\text{inc}} + \frac{4}{3} \cdot G_{\text{hom}}}; \quad (28)$$

Метод МТ [8]:

$$K_{\text{hom}} = K_m + \frac{f_{\text{inc}} \cdot (K_{\text{inc}} - K_m) \cdot K_m}{(1 - f_{\text{inc}}) \cdot (K_{\text{inc}} - K_m) \cdot \alpha + K_m}; \quad (29)$$

$$G_{\text{hom}} = G_m + \frac{f_{\text{inc}} \cdot (G_{\text{inc}} - G_m) \cdot G_m}{(1 - f_{\text{inc}}) \cdot (G_{\text{inc}} - G_m) \cdot \beta + G_m}, \quad (30)$$

где  $K_m$  и  $K_{\text{inc}}$  – соответственно модуль объемных деформаций матрицы и включения в композитной системе;

$G_m$  и  $G_{\text{inc}}$  – соответственно модуль сдвига матрицы и включения в композитной системе;

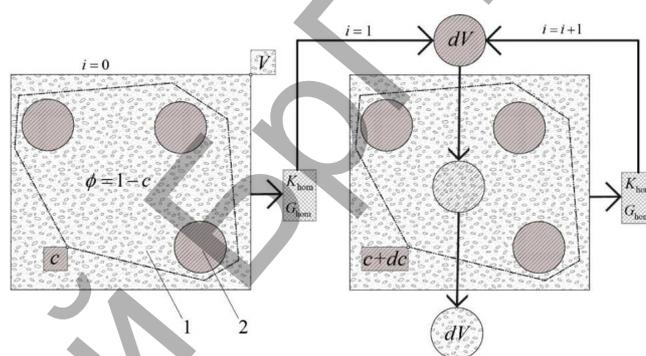
$\alpha$  и  $\beta$  – коэффициенты, учитывающие геометрическую форму включения.

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяют по зависимостям (11) и (12), используя следующие условия:  $K_0 = K_m, G_0 = G_m$ .

**Методы дифференциальной теории эффективной среды.** Если композитная система обладает явно выраженной структурой с морфологией «матрица – включение», то для определения ее эффективных жесткостных характеристик можно использовать модель, получившая название – дифференциальная теория эффективной среды [11–14].

Ключевой идеей DEMT является определение эффективных жесткостных характеристик композитной системы посредством итерационного цикла последовательного замещения бесконечно малого значения исходного объема матрицы эквивалентным объемом включения, начиная с единичной концентрации включения до тех пор, пока его концентрация не достигнет заданного значения. Единичная концентрация – относительный объем включения, при котором не наблюдается эффекта влияния соседних включений.

Таким образом, на каждой итерации, вновь добавляемый объем фазы включения в DEMT всегда будет находиться в единичной концентрации по отношению к текущему состоянию композитной системы (рис. 2).



1 – фаза матрицы, 2 – фаза включения

Рисунок 2 – Графическая интерпретация модели DDMT

В DDMT эффективный тензор упругости, при котором включение находится в матрице в единичной концентрации, определяется по следующей зависимости [7]:

$$C_{\text{hom}} = C_m + c (C_{\text{inc}} - C_m) \cdot A_{\text{inc}}, \quad (31)$$

где  $c$  – объемная единичная концентрация включения в композитной системе.

Рассматривая состояние композитной системы на каждой стадии итерационного процесса замещения объема матрицы объемом включения, можно определить линейную часть приращения объема добавляемого включения [7]:

$$dc = (1 - c) \cdot \frac{dV}{V}, \quad (32)$$

где  $dc$  – приращение объема добавляемого включения;

$dV$  – объем удаляемой части матрицы;

$V$  – объем композитной системы.

Подставляя (32) в (31), получают дифференциальное уравнение для определения эффективного тензора упругости [7]:

$$\frac{dC_{\text{hom}}}{dc} = \frac{1}{1 - c} (C_{\text{inc}} - C_{\text{hom}}) \cdot A_{\text{inc}}. \quad (33)$$

Исходя из дифференциального уравнения (33), получают следующие уравнения для определения эффективных жесткостных характеристик композитной системы [15]:

$$K_{\text{hom}} = K_{\text{inc}} - (1 - f_{\text{inc}}) \cdot (K_{\text{inc}} - K_m) \cdot \left( \frac{3 \cdot K_{\text{hom}} + 4 \cdot G_{\text{hom}}}{3 \cdot K_m + 4 \cdot G_m} \right); \quad (34)$$

$$G_{\text{hom}} = G_{\text{inc}} - (1 - f_{\text{inc}}) \cdot (G_{\text{inc}} - G_m) \times \left( \frac{G_{\text{hom}}}{G_m} \right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left( \frac{3 \cdot K_{\text{hom}} + 4 \cdot G_{\text{hom}}}{3 \cdot K_m + 4 \cdot G_m} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (35)$$

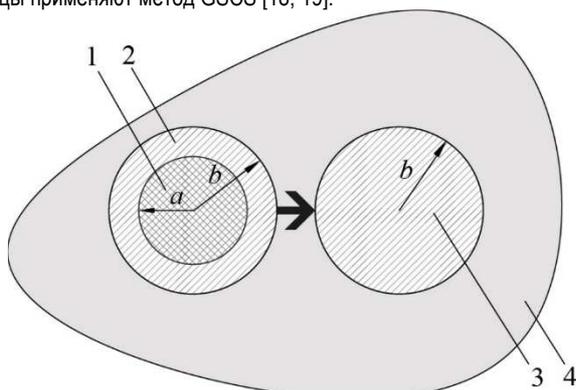
В отличие от теории эффективной среды положения DDMT могут применяться только для определения эффективных жесткостных характеристик в двухфазных композитных системах с морфологией

структуры «матрица – включение». Поэтому решения традиционной DEMT не применимы к цементным композитным системам, поскольку в их структуре между цементной матрицей и включением в виде заполнителя присутствует промежуточный слой цементной матрицы, характеристики которого отличаются от характеристик основной матрицы, т.е. фактически их структура является трехфазной.

В работах [16, 17] предложен новый вариант концепции DEMT получившей название – New DEMT, которая позволяет применять положения традиционной DEMT к цементным композитным системам. Концепция New DEMT использует три основных подхода:

1. Сферическое включение и оболочку из промежуточного слоя матрицы, вокруг включения, преобразуют в единую эффективную частицу, имеющей соответствующие жесткостные характеристики и геометрические размеры (рис. 3).

Для определения жесткостных характеристик эффективной частицы применяют метод GSCS [18, 19].



1 – фаза включения, 2 – фаза матрицы, 3 – эффективная частица, 4 – эквивалентная гомогенная среда

Рисунок 3 – Графическая интерпретация метода GSCS

Необходимость данного преобразования обусловлено переходом от трехфазной композитной системы к двухфазной системе с морфологией структуры «матрица – включение», для которой возможно применение положений традиционной DEMT.

Для эффективной частицы сферической формы решения, приведенные в [18, 19] имеют следующий вид:

$$A_{chr} \cdot \left( \frac{G_{hom}^p}{G_m} \right)^2 + 2 \cdot B_{chr} \cdot \left( \frac{G_{hom}^p}{G_m} \right) + C_{chr} = 0; \quad (36)$$

$$K_{hom}^p = K_m + \frac{f_{inc} \cdot (K_{inc} - K_m)}{1 + (1 - f_{inc}) \cdot \left[ \frac{K_{inc} - K_m}{K_m + \frac{4}{3} \cdot G_m} \right]}, \quad (37)$$

где  $K_{hom}^p$  и  $G_{hom}^p$  – соответственно объемный модуль и модуль сдвига эффективной частицы;

$A_{chr}, B_{chr}, C_{chr}$  – коэффициенты метода GSCS.

2. Эффективные жесткостные характеристики композитной системы, содержащей единичную концентрацию эффективных частиц, определяют в рамках традиционной модели DEMT, на основе решений, приведенных в [20–21], которые адаптированы под определение эффективных жесткостных характеристик в следующем виде [17]:

$$\frac{K_{hom}^{dil}}{K_m} = 1 + k \cdot c_{dil}; \quad (38)$$

$$\frac{G_{hom}^{dil}}{G_m} = 1 + g \cdot c_{dil}, \quad (39)$$

где  $K_{hom}^{dil}$ ,  $G_{hom}^{dil}$  – соответственно эффективный модуль объемных деформаций и модуль сдвига композитной системы, содержащей концентрацией эффективных частиц;

$c_{dil}$  – единичная объемная концентрация эффективных частиц;

$k$  и  $g$  – коэффициенты, учитывающие геометрическую форму эффективных частиц.

Для эффективных частиц сферической формы, зависимости для определения коэффициентов  $k$  и  $g$  имеют следующий вид [17]:

$$k = \frac{\left( K_m + \frac{4}{3} \cdot G_m \right) \cdot (K_{hom}^p - K_m)}{K_m \cdot \left( K_{hom}^p + \frac{4}{3} \cdot G_m \right)};$$

$$g = \frac{5 \cdot \left( K_m + \frac{4}{3} \cdot G_m \right) \cdot (G_{hom}^p - G_m)}{3 \cdot G_m \cdot \left( K_m + \frac{8}{9} \cdot G_m \right) + 2 \cdot G_{hom}^p \cdot (K_m + 2 \cdot G_m)} \quad (40)$$

На основании (38) и (39) получают дифференциальные уравнения, позволяющие определять эффективные жесткостные характеристики при заданной концентрации эффективных частиц, принимая следующие условия  $K_{hom}^{dil} = K_m = K$  и  $G_{hom}^{dil} = G_m = G$  [17]:

$$K + dK = K + k \cdot K \cdot \frac{dV}{V}; \quad (41)$$

$$G + dG = G + g \cdot G \cdot \frac{dV}{V}. \quad (42)$$

В New DEMT для оценки эффективных жесткостных характеристик используют значение относительного объема матрицы в композитной системе, которое получают путем преобразования зависимости (32):

$$d\phi = -\phi \cdot \frac{dV}{V}, \quad (43)$$

где  $\phi$  – относительный объем матрицы в композитной системе.

Подставляя (43) в (41) и (42), получаем окончательный вид дифференциальных уравнений для определения эффективных жесткостных характеристик в рамках концепции New DEMT [17]:

$$\frac{dK}{d\phi} = -\frac{k \cdot K}{\phi}; \quad \frac{dG}{d\phi} = -\frac{g \cdot G}{\phi}. \quad (44)$$

Следует отметить, что дифференциальные уравнения (44) можно использовать для определения эффективных жесткостных характеристик композитных систем с эффективным включением только одной определенной фракции. При наличии в композитной системе различных фракций эффективных частиц, авторы New DEMT в дифференциальных уравнениях (44) рекомендуют применять усредненные коэффициенты  $\bar{k}$  и  $\bar{g}$  [17]:

$$\bar{k} = \sum_i k_i \cdot c_{p,i}; \quad \bar{g} = \sum_i g_i \cdot c_{p,i}, \quad (45)$$

где  $k_i$  и  $g_i$  – коэффициенты, определяемые для эффективных частиц  $i$ -й фракции;

$c_{p,i}$  – объемная концентрация эффективных частиц  $i$ -й фракции в общем объеме эффективных частиц.

Объемная концентрация  $i$ -й фракции эффективных частиц определяют по следующей зависимости:

$$c_{p,i} = \frac{c_{inc,i} \cdot \left( \frac{b_i}{a_i} \right)^3}{\sum_i c_{inc,i} \cdot \left( \frac{b_i}{a_i} \right)^3}, \quad (46)$$

где  $c_{inc,i}$  – объемная концентрация сферического включения  $i$ -й фракции в его общем относительном объеме;

$b_i$  – радиус эффективных частиц  $i$ -й фракции;

$a_i$  – радиус сферического включения  $i$ -й фракции.

3. Значение относительного объема матрицы, используемое в дифференциальных уравнениях (44), определяют исходя из объемной доли включения и концентрации каждой отдельной фракции включения в его относительном объеме:

$$\phi = 1 - f_{inc} \cdot \sum_i c_{inc,i} \cdot \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^3 \quad (47)$$

**Моделирование эффективных жесткостных характеристик.**

Значение эффективного модуля упругости композитной системы определяют по следующей зависимости:

$$E_{hom} = \frac{9 \cdot K_{hom} \cdot G_{hom}}{3 \cdot K_{hom} + G_{hom}} \quad (48)$$

где  $E_{hom}$  – гомогенизированный модуль упругости композитной системы.

Модуль сдвига и модуль объемных деформаций для каждой фазы определяют по следующим зависимостям:

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \quad (49)$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (50)$$

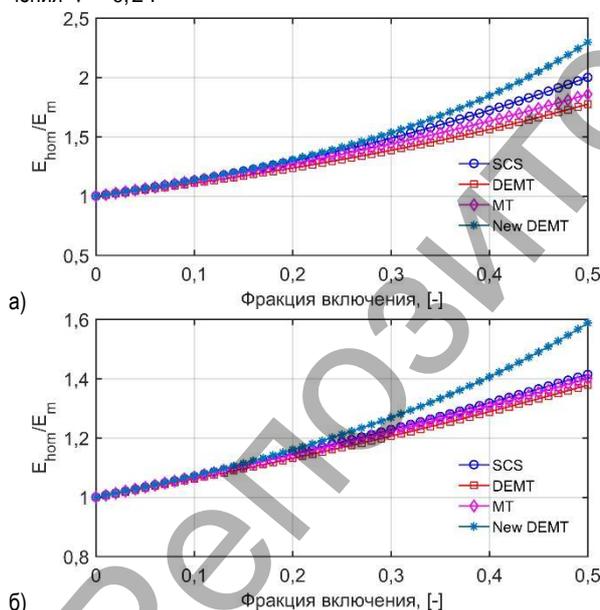
где  $K$  – модуль объемных деформаций;

$G$  – модуль сдвига;

$E$  – модуль упругости;

$\nu$  – коэффициент Пуассона.

Для моделирования эффективных жесткостных характеристик (рис. 4) применялись следующие характеристики: модуль упругости матрицы  $E_m = 25$  ГПа, коэффициент Пуассона матрицы и включения  $\nu = 0,2$ .



**Рисунок 4** – Сравнение рассмотренных методов гомогенизации на примере двухфазной композитной системы «матрица-включение»

при  $\frac{E_m}{E_{inc}} = \frac{1}{4}$  (а) и  $\frac{E_m}{E_{inc}} = \frac{1}{2}$  (б)

**Заключение.** Рассмотрены основные теоретические аспекты моделирования эффективных жесткостных характеристик цементных композитных систем различными методами гомогенизации: SCS, MT, DMT и New DMT.

Целесообразность применения рассмотренных методов определяют исходя из представления цементной композитной системы.

Например, исходя из представления бетонного композита, для определения его эффективных жесткостных характеристик, рационально использовать следующие методы гомогенизации:

- на уровне 1 – метод SCS;
- на уровне 2 – метод SCS или MT;
- на уровне 3 – метод New DMT.

*Перечень условных обозначений*

REV – репрезентативный элементарный объем (англ. – Representative Element Volume);

MT – метод Mori-Tanaka;

SCS – последовательный метод (англ. – Self-Consistent Scheme);

DEMT – дифференциальная теория эффективной среды (англ. – Differential Effective Medium Theory);

GSCS – обобщенный последовательный метод (англ. – Generalized Self-Consistent Scheme).

**СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Zaoui, A. Continuum Micromechanics: Survey / A. Zaoui // Journal of Engineering Mechanics. – 2002. – Vol. 128, Iss. 8. – P. 808–816.
2. Budiansky, B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials / B. Budiansky // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1965. – Vol. 13, iss. 4. – P. 223–227.
3. Hill, R. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials—III. Self-consistent model / R. Hill // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1965. – Vol. 13, iss. 4 – P. 189–198.
4. Hill, R. A self-consistent mechanics of composite materials / R. Hill // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1965. – Vol. 13, iss. 4 – P. 213–222.
5. Mori, T. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions / T. Mori, K. Tanaka // Acta Metallurgica. – 1973. – Vol. 21, iss. 5 – P. 571–574.
6. Benveniste, Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials / Y. Benveniste // Mechanics of Materials. – 1987. – Vol. 6, iss. 2. – P. 147–157.
7. Aboudi, J. Mechanics of Composite Materials. A Generalized Multiscale Analysis Approach / J. Aboudi, S.M. Arnold, B.A. Bednarczyk. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012. – 984 p.
8. Bernard, O. A multiscale micromechanics-hydration model for the early-age elastic properties of cement-based materials / O. Bernard, F.-J. Ulm, E. Lemarchand // Cement and Concrete Research. – 2003. – Vol. 33, iss. 9. – P. 1293–1309.
9. Ulm, F.-J. Is concrete a poromechanics materials? – A multiscale investigation of poroelastic properties / F.-J. Ulm, G. Constantinides, F.H. Heukamp // Materials and Structures. – 2004. – Vol. 37, iss. 1. – P. 43–58.
10. Eshelby, J.D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems / J.D. Eshelby // Proceedings of The Royal Society a Mathematical Physical and Engineering Sciences. – 1957. – Vol. 241, iss. 1226. – P. 376–396.
11. McLaughlin, R. A study of the differential scheme for composite materials / R. McLaughlin // International Journal of Engineering Science. – 1977. – Vol. 15, iss. 4 – P. 237–244.
12. Norris, A.N. A differential scheme for the effective moduli of composites / A.N. Norris // Mechanics of Materials. – 1985. – Vol. 4, iss. 1. – P. 1–16.
13. Norris, A.N. A generalized differential effective medium theory / A.N. Norris, A.J. Callegari, P. Sheng // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1985. – Vol. 33, iss. 6. – P. 525–543.
14. Benveniste, Y. A Differential Effective Medium Theory with a Composite Sphere Embedding / Y. Benveniste // Journal of Applied Mechanics. – 1987. – Vol. 54, iss. 2. – P. 466–468.
15. Kim, M. Differential Scheme Effective Medium Theory for Hot-Mix Asphalt [E\*] Prediction / M. Kim, W.G. Buttlar // Journal of Materials in Civil Engineering. – 2011. – Vol. 23, iss. 1. – P. 69–78.
16. Garboczi, E.J. New effective medium theory for the diffusivity or conductivity of a multi-scale concrete microstructure model / E.J. Garboczi, J.G. Berryman // Concrete Science and Engineering. – 2000. – Vol. 2, iss. 6. – P. 88–96.

17. Garboczi, E.J. Elastic moduli of a material containing composite inclusions: Effective medium theory and finite element computations / E.J. Garboczi, J.G. Berryman // *Mechanics of Materials*. – 2001. – Vol. 33, iss. 8. – P. 455–470.
18. Christensen, R.M. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models / R.M. Christensen, K.H. Lo // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1979. – Vol. 27, iss. 4. – P. 315–330.
19. Christensen, R.M. A critical evaluation for a class of micro-mechanics models / R.M. Christensen // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1990. – Vol. 38, iss. 3. – P. 379–404.
20. Torquato, S. Random Heterogeneous Media: Microstructure and Improved Bounds on Effective Properties / S. Torquato // *Applied Mechanics Reviews*. – 1991. – Vol. 44, iss. 2. – P. 37–76.
21. Schwartz, L.M. Interfacial transport in porous media: Application to dc electrical conductivity of mortars / L.M. Schwartz, E.J. Garboczi, D.P. Bentz // *Journal of Applied Physics*. – 1995. – Vol. 78, iss. 10. – P. 5898–5908.

*Материал поступил в редакцию 26.01.2018*

***KRAVCHENKO V.V. The basic theoretical aspects modelling of homogeneous elastic properties of the cement-based composite***

The basic theoretical aspects modeling of homogeneous elastic properties of the cement-based composite by various methods, such as Self-Consistent Scheme, Mori-Tanaka, Differential Effective Medium Theory and New Differential Effective Medium Theory, are presented.