

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРНИРНО-СОЕДИНЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Босаков С.В., Козунова О.В.

Введение. Контактная задача для шарнирно-соединенных прямоугольных плит на упругом основании в полной мере и универсальной постановке не решена до настоящего времени. Исследованиями по расчету шарнирно-соединенных плит на упругом основании занимались в СССР: Б.Г. Корнев [1], который предложил решение этой задачи с использованием обобщенных функций; Р.В. Серебряный [2] – на основании своего подхода дал решение пространственной задачи об изгибе шарнирно-соединенных прямоугольных плит на упругом полупространстве и составил таблицы для облегчения инженерных расчетов; Г.Я. Попов [3] получил точное решение контактной задачи для шарнирно-сочлененных балочных плит на упругой полуплоскости, но при этом он использовал сложный математический аппарат для получения этого решения; А.Г. Юрьев [4] использовал интегральный метод Л.П. Винокурова для решения этой задачи.

Общий подход для расчета шарнирно соединенных жестких прямоугольных плит на упругом основании, основанный на смешанном методе строительной механики [5] и способе Жемочкина [6], был описан в работе авторов [7]. Этот подход позволяет с единых позиций рассчитывать шарнирно – соединенные плиты или балки любой формы и жесткости на различных моделях упругого основания на произвольную вертикальную нагрузку. Численная реализация предлагаемого подхода выполнена на семи шарнирно-соединенных прямоугольных жестких плитах на основаниях Винклера и приведена в работе [7].

Постановка контактной задачи. Рассмотрим систему из Np шарнирно-соединенных в двух точках прямоугольных плит на упругом основании (рисунок 1) под действием внешней нагрузки. Крайние плиты будем считать шарнирно опертыми с одной стороны на неподвижное основание.

Каждую плиту разобьем на одинаковые прямоугольные участки размерами $\Delta x \times \Delta y$ и в центре каждого участка поставим вертикальную связь, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием. Будем считать, что усилие в связи вызывает равномерную эпюру давлений в пределах участка.

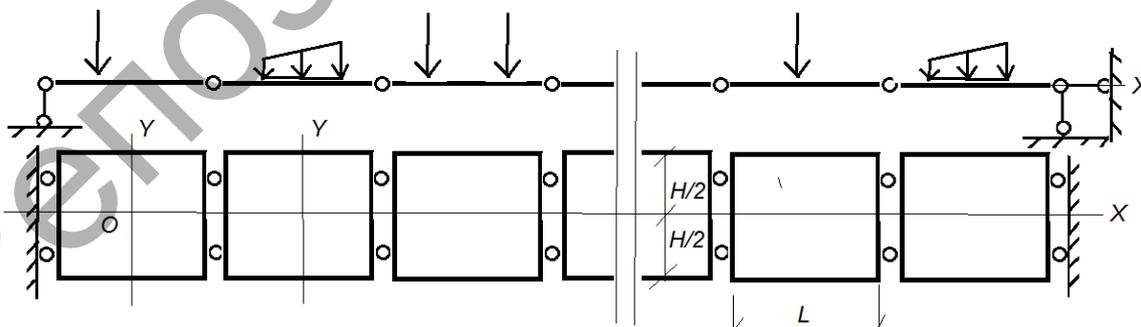


Рисунок 1 – Заданная система шарнирно-соединенных
прямоугольных плит

Полученную статически неопределимую систему решаем смешанным методом строительной механики [5], приняв за неизвестные усилия в введенных связях, линейные и угловые перемещения защемлении в центре каждой плиты и поперечные силы в соединительных шарнирах. На рисунке 2 приводится фрагмент основной системы смешанного метода для крайних плит.

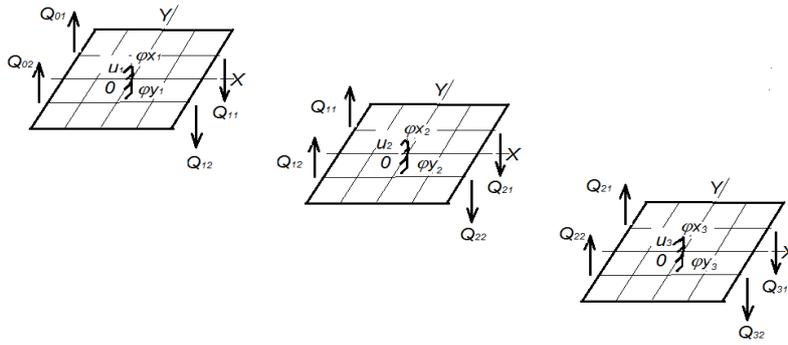


Рисунок 2 – Левый фрагмент основной системы смешанного метода строительной механики

Канонические уравнения смешанного метода для средней плиты с номером i запишем в следующем виде

$$\begin{cases}
 \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i-1} Q_{i-1}^k + \delta_{1,1} X_1 + \dots + \delta_{1,m} X_m + u_i + \phi x_i y_1 + \phi y_i x_1 + \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i} Q_i^k + \Delta_{1,p} = 0 \\
 \dots \\
 \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i-1} Q_{i-1}^k + \delta_{m,1} X_1 + \dots + \delta_{m,m} X_m + u_i + \phi x_i y_m + \phi y_i x_m + \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i} Q_i^k + \Delta_{m,p} = 0 \\
 \sum_{k=1}^m X_k y_k - \frac{h}{2} Q_{i,1} + \frac{h}{2} Q_{i,2} + \frac{h}{2} Q_{i-1,1} - \frac{h}{2} Q_{i-1,2} - M_x = 0 \\
 \sum_{k=1}^m X_k x_k - \frac{L}{2} Q_{i,1} - \frac{L}{2} Q_{i,2} - \frac{L}{2} Q_{i-1,1} - \frac{L}{2} Q_{i-1,2} - M_y = 0 \\
 \sum_{k=1}^m X_k - Q_{i,1} - Q_{i,2} + Q_{i-1,1} + Q_{i-1,2} - R = 0 \\
 \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i-1} Q_{i-1}^k + u_{i-1} - \frac{h}{2} \phi x_{i-1} - \frac{L}{2} \phi y_{i-1} + u_i - \frac{h}{2} \phi x_i + \frac{L}{2} \phi y_i = 0 \\
 \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i-1} Q_{i-1}^k + u_{i-1} + \frac{h}{2} \phi x_{i-1} + \frac{L}{2} \phi y_{i-1} + u_i + \frac{h}{2} \phi x_i - \frac{L}{2} \phi y_i + \sum_{k=1}^2 \delta_{Q,i} Q_i^k = 0,
 \end{cases} \quad (1)$$

где m – число участков Жемочкина на плите;

$u_i, \phi x_i, \phi y_i$ – неизвестные линейное и угловые перемещения введенного защемления на плите с номером i ;

R, M_x, M_y – равнодействующая внешних сил и моменты равнодействующей относительно координатных осей на плите с номером i ;

$Q_{i,1}, Q_{i,2}$ – поперечные силы в разрезанных шарнирах по одну правую сторону плиты с номером i ;

X_k – усилие в связи Жемочкина с номером k .

Коэффициенты при неизвестных уравнения (1) определяются из следующих соотношений:

а) для основания Винклера [7]

$$\begin{aligned}
 \delta_{i,k} &= \frac{1}{K \Delta x \Delta y} + \frac{b^2}{16\pi D} w_{i,k}, \quad i = k; \\
 \delta_{i,k} &= \frac{b^2}{16\pi D} w_{i,k}, \quad i \neq k,
 \end{aligned} \quad (2)$$

где K – коэффициент постели упругого основания, определяется по формуле [6]

$$K = \frac{E_0(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)h_0}, \quad (3)$$

справедливой при $h_0 \leq \frac{b}{2}$;

б) для упругого полупространства

$$\delta_{i,k} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta x} F_{i,k} + \frac{b^2}{16\pi D} w_{i,k}, \quad (4)$$

где $F_{i,k}$ – безразмерная функция, определяется [6] по формуле

$$F_{i,k} = 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \left[\ln \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \ln \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1} \right) + \ln \left(1 + \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1} \right) \right]. \quad (5)$$

Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода в полярных координатах определяются по формуле [8] (рисунок 3)

$$w(r, \theta) = \frac{Pb^2}{16\pi D} \left(\frac{d^2 - 2dr \cos \theta + r^2}{b^2} \ln \frac{d^2 - 2dr \cos \theta + r^2}{b^2} + \frac{2dr \cos \theta}{b^2} \left(\ln \frac{d^2 r^2}{b^4} - 1 \right) - \frac{d^2}{b^2} \ln \frac{d^2}{b^2} - \frac{r^2}{b^2} \ln \frac{r^2}{b^2} \right), \quad (6)$$

где d – радиальная координата точки приложения сосредоточенной на плите; D – цилиндрическая жесткость плиты.

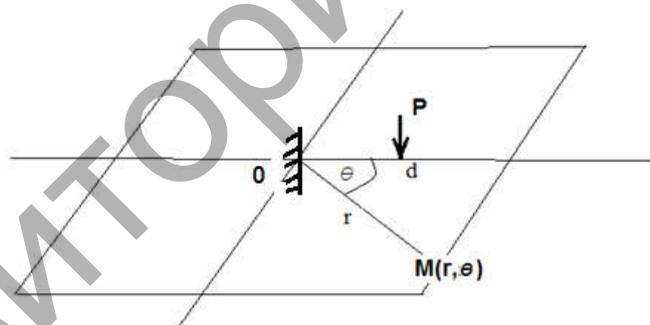


Рисунок 3 – Плита с защемленной нормалью в полярных координатах

Первые $(m+3)$ системы (1) подобны стандартным уравнениям способа Жемочкина [6], где дополнительно входят 4 поперечные силы в разрезанных шарнирах. Последние два уравнения выражают условия отсутствия вертикальных взаимных перемещений в местах расположения промежуточных шарниров на границе двух соседних плит. Для первой и последней крайних плит в системе (1) два уравнения выражают условия отсутствия вертикальных перемещений в левых и правых опорных шарнирах. Свободные члены системы (1) определяются с помощью (3).

Если обозначить число плит через Np , то общее число неизвестных усилий в связях Жемочкина, линейных и угловых перемещений введенных защемлений на плитах и поперечных сил в шарнирах для расчета этой системы плит выразится формулой

$$Np(m+3) + 2Np + 2 \quad (4)$$

Структура системы разрешающих уравнений для системы плит представлена на рисунке 4. Блоки по главной диагонали образованы по системе (1), побочные блоки являются нулевыми

в случае основания Винклера. В случае упругого полупространства они характеризуют взаимное влияние плит и определяются с использованием формул (5).

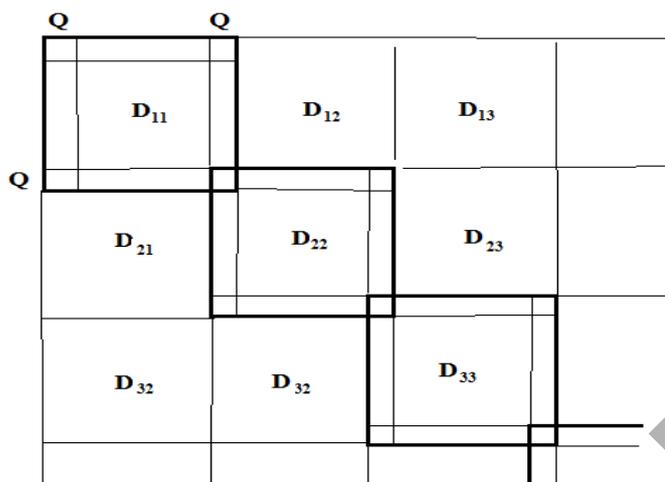
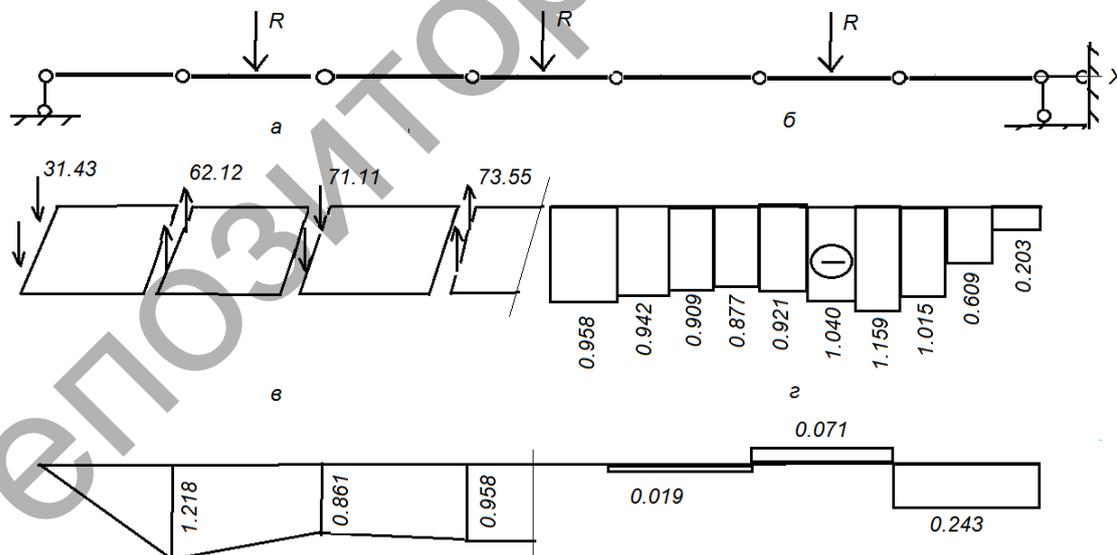


Рисунок 4 – Структура системы разрешающих уравнений

Численная апробация. Предлагаемый универсальный подход решения контактной задачи численно реализуется для шарнирно-соединенных жестких плит (понтон) на основании Винклера (пример 1) [7] и гибких аэродромных плит на упругом полупространстве (пример 2).

Пример 1. Расчет системы из 7 прямоугольных жестких плит размерами 5м x 6,8м на основании Винклера (коэффициент постели – 10 кН/м^3) приведен в [7]. Собственный вес плиты - 20 кН. Вторая, четвертая и шестая плита нагружены симметричной нагрузкой $R=600 \text{ кН}$.

На рисунке 5 приведены результаты расчета поперечных сил на границах между плитами, реактивных давлений, вертикальных и угловых перемещений плит. Из условия симметрии результаты приведены для половины системы.



a - распределение поперечных сил в соединительных шарнирах (кН);

б - распределение реактивных давлений (кН/м^3);

в - осадки плиты (м); г - угловые перемещения плит (рад) в точке k

Рисунок 5 – Результаты расчета системы из 7 шарнирно-соединенных жестких плит (понтон) на основании Винклера

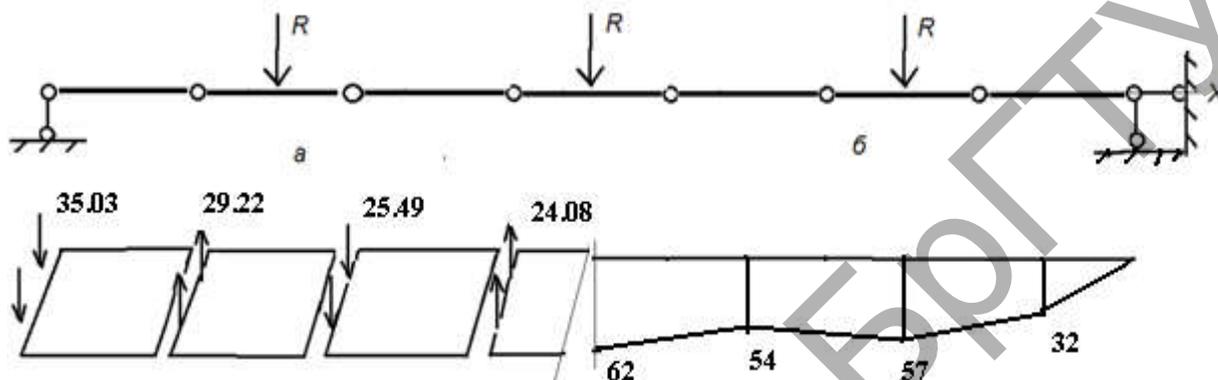
Пример 2. В данном примере рассмотрим расчет системы из 7 прямоугольных гибких плит размером 4м x 3м на упругом полупространстве, со следующими характеристиками грунта $E_0 = 25 \text{ МПа}$; $\nu_2 = 0.2$; $h_2 = 0.25 \text{ м}$. Собственный вес плиты - 54 кН.

Показатель гибкости определяется по формуле [9] и равен

$$\beta = \frac{Ea^3}{(1-\nu^2)D} = 44.5 .$$

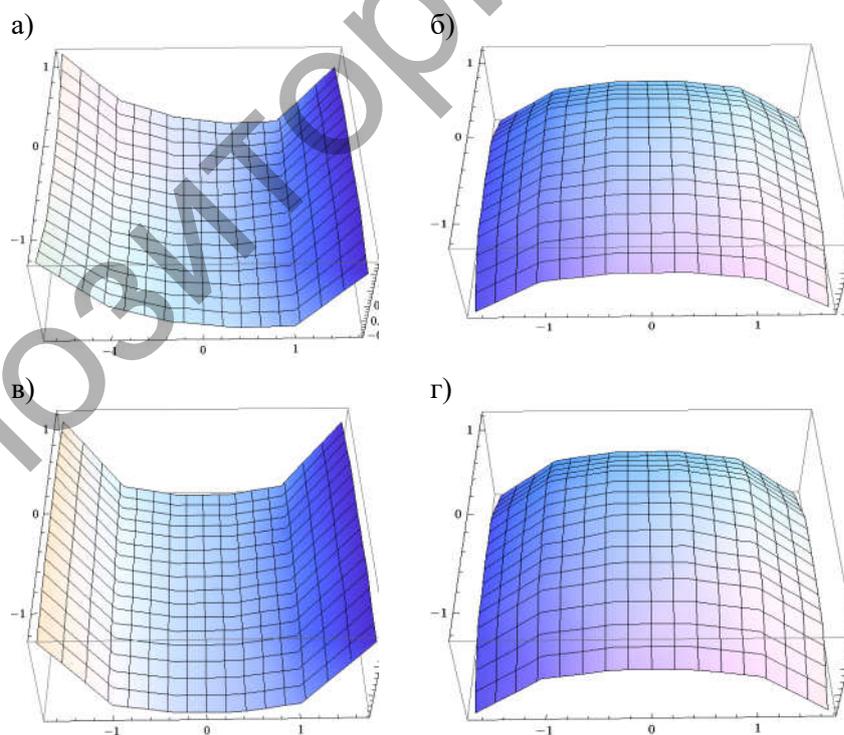
Вторая, четвертая и шестая плита нагружены симметричной нагрузкой $R=600$ кН. Разбивка каждой плиты – на 3×4 равных прямоугольных участков. Общее число неизвестных – 121.

На рисунках 6,7 приведены результаты расчета для распределения поперечных сил в соединительных шарнирах, осадков центров плиты и усилий в связях Жемочкина. Из условия симметрии, как и в примере 1, результаты расчета приведены для половины системы.



а – распределение поперечных сил в соединительных шарнирах (кН);
б – осадки центров плиты (мм)

Рисунок 6 – Результаты расчета системы из 7 шарнирно-соединенных гибких плит на упругом полупространстве



а) в первой слева плите; б) во второй слева плите;
в) в третьей слева плите; г) в центральной плите

Рисунок 7 – Результаты расчета системы из 7 шарнирно-соединенных гибких плит: усилия в связях Жемочкина (кН)

Выводы

В работе получила развитие несложная универсальная методика решения контактных задач для системы шарнирно-соединенных прямоугольных плит на упругом основании. Методика основана на смешанном методе Жемочкина и может быть обобщена на любое число плит конечной жесткости и различные модели упругого основания. Отличие от стандартного способа Жемочкина заключается во введении дополнительных неизвестных поперечных сил в соединительных шарнирах и составлении условий равенства вертикальных перемещений в общих шарнирах смежных прямоугольных плит.

Полученные результаты могут быть непосредственно использованы при расчете сборных железобетонных дорожных и аэродромных плит (гибкие плиты), плит понтонных переправ (жесткие плиты).

Список источников

1. Корнев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М., Стройиздат, 1954.
2. Серебряный Р.В. Расчет тонких шарнирно-соединенных плит на упругом основании. М., Стройиздат, 1962. 64с.
3. Попов Г.Я. О расчете неограниченной шарнирно-разрезной балочной плиты, лежащей на упругом полупространстве. Изв. Вузов, Строительство и архитектура, 3, 1959. С.25-33.
4. Юрьев А.Г. Балки и плиты с конструктивными и пластическими шарнирами на податливом основании. Харьков: Изд. Изв. Вузов. 1964.
5. Ржаницин А.Р. Строительная механика. М., Высшая школа. 1991. 439с.
6. Жемочкин Б.Н., Сеницын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М., Стройиздат, 1962. 239с.
7. Босаков С.В. Расчет шарнирно-соединенных прямоугольных жестких плит на основании Винклера / С.В. Босаков, С.И. Зиневич, О.В. Козунова/ НТЖ: Строительная механика и расчет сооружений. М. – №3 (278) – 2018. – с. 8-10
8. Босаков С.В. . Статические расчеты плит на упругом основании.- Мн., БНТУ, 2002. 128с.
9. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 639 с.