$$\delta^2 = \frac{G(a_1, a_2, \ldots, a_m, b)}{G(a_1, a_2, \ldots, a_m)} \qquad (5)$$

На примере несовместной системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$$

показано, что квадратичное уклонение δ^2 действительно является наименьшим.

Также составлена программа на языке PASCAL, которая позволяет находить решение переопределенной несовместной системы с любым числом уравнений, превышающим число неизвестных, по методу наименьших квадратов, рассмотренному выше.

Литература

1. Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. - М.: Наука, 1969.

АСФЕРИЧЕСКИЕ БАЗИСЫ СООТНОШЕНИЙ ПРО-Р-ГРУПП

Шишкевич А.А.

Белорусский государственный университет

г. Минск, пр. Скорины-4, БГУ, ММФ, кафедра Высшей Алгебры

Пусть p — произвольное простое число. Все группы, встречающиеся в статье, предполагаются про-p-группами, подгруппы — замкнутыми; все модули предполагаются компактными модулями над пополненным групповым кольцом ΩG, где Ω — поле из p элементов, G — соответствующая про-p-группа; все морфизмы предполагаются непрерывными.

Следующее определение класса асферических про-p-групп и приведённые ниже факты принадлежат О. В. Мельникову. Пусть

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1 \qquad (1)$$

некоторое копредставление про-p-группы G. Группа G действует слева (с помощью сопряжения) на абелевой группе экспоненты p $\overline{N} := N/N^*$, $N^* = N^p[N,N]$ — группа Фраттини N. ΩG-модуль $\overline{N}$ называется модулем соотношений группы G. По определению, группа G асферична, если существует копредставление (1), модуль соотношений $\overline{N}$ которого изоморфен некоторому пермутационному модулю $\Omega(T)$ (здесь T — некоторое проконечное G-пространство). Асферичность про-p-группы G не зависит от выбора копредставления, а именно, если асферично какое-нибудь из копредставлений, то асферично и любое другое. Стабилизаторы элементов G-пространства T суть конечные циклические p-группы, тривиально пересекающиеся между собой. Подгруппы асферических групп также асферичны.

Если асферическая группа G конечно определена, то найдётся набор соотношений $\{r_1,\dots,r_m\}\subseteq N$, порождающих нормальный делитель N, для которых $\overline{N}\cong\bigoplus\limits_{i=1}^{m}\Omega G\cdot\overline{r}_i$, причём левый аннулятор элемента $\overline{r}_i$ в кольце ΩG совпадает с ядром $I_G(\varphi(S_i))$ канонического эпиморфизма $\Omega G\to\Omega(G/\varphi(S_i))$, где S_i — централизатор элемента $r_i\in F$ (циклическая группа, порождённая $\sqrt{r_i}$ — максимальным корнем из r_i). Тогда, $\overline{N}\cong\bigoplus\limits_{i=1}^{m}\Omega(G/\varphi(S_i))=\Omega(\bigcup G/\varphi(S_i))$ — конечно порождённый пермутационный модуль. Существование такой системы соотношений отражает неформальное содержание понятия асферичности — отсутствие каких-либо дополнительных соотношений между соотношениями, кроме естественных. В случае, когда множество определяющих соотношений недискретно, ситуация несколько сложнее.

Асферическим базисом соотношений копредставления (1) про-p-группы G назовём замкнутое подмножество $R\subseteq_C N$, такое, что $N=(R)^F$ и $\overline{N}\cong\bigoplus\limits_{r\in R}\Omega G\cdot\overline{r}$, $Ann_{\Omega G}(\overline{r})=I_G(\varphi(S_r))$. Подобное определение нуждается в несложной проверке существования прямой суммы стоящего справа пучка однопорождённых G-модулей. (По поводу прямых сумм пучков модулей см. Мельников [1].) Понятно, что из существования асферичного базиса соотношений вытекает асферичность копредставления (1): $\overline{N}\cong\Omega(T)$, где T — образ непрерывного отображения $\mu: G\times R\to\overline{N}$, $(g,r)\mapsto g\cdot\overline{r}$.

В данной заметке мы сформулируем критерий асферичности базиса соотношений, аналогичный полученному для абстрактных групп (см. Чисвелл, Коллинз, Хюбшманн [2]) и получим его простейшие следствия.

Придерживаясь выбранных выше обозначений, рассмотрим свободную F-операторную про-p-группу $\widetilde{N}$ с базисом R. Ясно, что $\widetilde{N} = F(F \times R)$ — свободная про-p-группа над компактным пространством $F \times R$. Имеет место канонический эпиморфизм $\theta : \widetilde{N} \to N$, $(u,r) \mapsto uru^{-1}$ — «вычисляющая» функция. Ядро $E = Ker\,\theta$ будем называть множеством тождеств копредставления (1). Элементарными тождествами Пайфер назовём семейство элементов $\widetilde{N}$ $P_0 = \{ab({}^{\theta(b)^{-1}}a)^{-1}b^{-1}, aba^{-1}({}^{\theta(a)}b)^{-1}, cd^{-1}\}$, где $a,b,c,d \in F \times R$, $pr_R c = pr_R d$, $\theta(c) = \theta(d)$. Множеством тождеств Пайфер назовём нормальное замыкание элементарных тождеств Пайфер в $\widetilde{N}$, $P = (P_0)^{\widetilde{N}} \lhd \widetilde{N}$. Ясно, что $P \subseteq E$.

Предложение. Пусть $R \subseteq_C N$. В принятых обозначениях,

$E = P \Leftrightarrow R$ — асферический базис соотношений.

Доказательство. Прежде всего установим следующий изоморфизм G-модулей (F-операторных групп, с тривиальным действием N):

$$\eta : \widetilde{N}/P\widetilde{N}^* \to \oplus_{r \in R} \Omega(G/\varphi(S_r)),\ (1,r) \mapsto 1\varphi(S_r).$$

Достаточно проверить, что

$$P\widetilde{N}^* = \left({}^{n}(1,r) = (1,r),\ {}^{s_r}(1,r) = (1,r) \mid n \in N, r \in R, s_r \in S_r\right)^{\widetilde{N}} \widetilde{N}^*. \qquad (2)$$

Проверим включение слева направо. По модулю $\widetilde{N}^*$

$$ab({}^{\theta(b)^{-1}}a)^{-1}b^{-1} \equiv a({}^{\theta(b)^{-1}}a)^{-1} = [a = (f,r)] = {}^{f}(1,r)({}^{\theta(b)^{-1}f}(1,r))^{-1} =$$

$$= {}^{f}((1,r)({}^{f^{-1}\theta(b)^{-1}f}(1,r))^{-1}) \equiv 1, \text{ так как } f^{-1}\theta(b)^{-1}f \in N.$$

Если $\theta(f_1,r) = \theta(f_2,r)$, то $f_2^{-1}f_1 \in S_r$. Поэтому $(f_1,r)(f_2,r)^{-1}$ принадлежит правой части (2). Для тождества $aba^{-1}({}^{\theta(a)}b)^{-1}$ проверка аналогична.

Проверим включение справа налево. Имеем

$${}^{n}(1,r)(1,r)^{-1} = [n = \theta(a), a \in \widetilde{N}] = {}^{\theta(a)}(1,r)(1,r)^{-1} \underset{\mathrm{mod}\, P\widetilde{N}^*}{\equiv} a(1,r)a^{-1}(1,r)^{-1} \underset{\mathrm{mod}\, \widetilde{N}^*}{\equiv} 1.$$

Для тождества ${}^{s_r}(1,r)(1,r)^{-1}$ всё очевидно.

Рассмотрим сейчас эпиморфизм

$$\lambda : \oplus_{r \in R} \Omega(G/\varphi(S_r)) \xrightarrow{\eta^{-1}} \widetilde{N}/P\widetilde{N}^* \to \widetilde{N}/E\widetilde{N}^* = \overline{N},\ 1\varphi(S_r) \mapsto \overline{r}.$$

Ясно, что R является базисом асферичности копредставления (1), в том и только в том случае, когда λ будет изоморфизмом, то есть тогда и только тогда, когда $P\widetilde{N}^* = E\widetilde{N}^*$. Следовательно осталось убедиться в том, что $P = E$ тогда и только тогда, когда $P\widetilde{N}^* = E\widetilde{N}^*$. Для этого рассмотрим расширение группы E/P с помощью свободной группы N:

$$1 \to E/P \to \widetilde{N}/P \to \widetilde{N}/E = N \to 1.$$

Тождества Пайфер показывают, что это расширение центрально. Значит, $\widetilde{N}/P = E/P \times \widetilde{N}/E$. Переходя к фактору по подгруппе Фраттини, получаем $\overline{E/P} \times \overline{N} = \widetilde{N}/P\widetilde{N}^* = \left[P\widetilde{N}^* = E\widetilde{N}^*\right] = \widetilde{N}/E\widetilde{N}^* = N/N^* = \overline{N} \Rightarrow \overline{E/P} = 0 \Rightarrow E = P.$

Импликация из $P = E$ в $P\widetilde{N}^* = E\widetilde{N}^*$ очевидна. Предложение доказано.

Следствие 1.) Если $\chi : R \to F$ некоторая непрерывная функция, то множество $R_\chi = \{\chi(r) r \chi(r)^{-1} \mid r \in R\}$ — замкнуто в F. Тогда R_χ — асферический базис соотношений копредставления $G = F/(R_\chi)^F$.

Следствие 2.) Если $\alpha \in Aut(F)$, то $\alpha(R)$ — асферический базис соотношений копредставления $G = F/(\alpha(R))^F$.

Доказательство следствия вытекает из того, что

$$P_R = E_R \quad \Rightarrow \quad P_{R_\chi} = E_{R_\chi}, P_{\alpha(R)} = E_{\alpha(R)}.$$

Литература.

1. Мельников О.В. Подгруппы и гомологии свободных произведений проконечных групп. // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1989. — т.53, №1. С. 97-120.
2. Chiswell I.M., Collins D.J., Huebschmann J. Aspherical group presentations // Math. Z. — 1981. — Bd 178. — S. 1-36.