

строительных материалов. При этом разработанные методики распространяются и проверены на керамзитобетоне невысокой прочности, в частности в работе [14] диапазон прочностей от 14 до 23 МПа.

2. Наилучшей схожимостью опытных и расчетных значений, а также наибольшей точностью обладает методика расчета, основанная на результатах экспериментальных исследований [14] и разработанная в развитие положений норм [1]. По своей точности, как отмечено в публикациях [8, 9], предложенная методика расчета значительно превышает точность методик расчета норм [2, 3, 5]. Более того, данная методика, в большинстве случаев, по своей точности превышает точность методик расчета, предложенных другими исследователями в работах [10-13], причем не только в условиях осевого местного сжатия, но и при полосовом центральном и краевом местном сжатии.

3. Методика [14] обеспечивает необходимую точность расчета сопротивления местному сжатию элементов из керамзитобетона (со средней плотностью от 1200 до 1800 кг/м³ и прочностью кубов от 6,0 до 23 МПа) при различных схемах расположения площади нагружения и может быть рекомендована для включения в отечественные ТНПА по расчету бетонных и железобетонных конструкций. В связи с возможностью получения при использовании керамзита, изготовленного на Петриковском керамзитовом заводе ОАО «Гомельский ДСК», керамзитобетона с прочностью кубов на сжатие 30 МПа и более для проверки надежности этой методики расчета необходимо проведение дополнительных экспериментальных исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бетонные и железобетонные конструкции: СНБ 5.03.01-02 с изменениями №1-5. – Введ. 01.07.03. – Минск: Минстройархитектуры Республики Беларусь, 2003. – 132 с.
2. Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования: СНиП 2.03.01-84*. – Введ. 20.08.84. – Москва: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 80 с.
3. Еврокод 2. Проектирование железобетонных конструкций. Общие правила и правила для зданий: ТКП EN 1992-1-1-2009*. – Введ. 01.01.2010. – Минск: Минстройархитектуры Республики Беларусь, 2015. – Часть 1-1. – 205 с.
4. ACI 318-14. Building Code Requirements for Reinforced Concrete. ACI 318-14 and Commentary. (318-14R). – American Concrete Institute: Farmington Hills, Mich., 2014. – 524 p.
5. Свод правил. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения: СП 63.13330.2012. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. – Москва: Институт ОАО НИЦ «Строительство», 2013. – 152 с.

6. DIN 1045-1:2008-08. Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 1: Bemessung und Konstruktion – 148 p.
7. Рак, Н.А. Сравнение отечественных и зарубежных норм по расчету элементов из легкого бетона при местном сжатии / Н.А. Рак, В.В. Бондарь // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Респ. Беларусь: Сборник научных трудов Междунар. науч.-метод. межвузовского семинара, Могилев, 16-18 ноября 2005 г. / Белорусско-Российский университет. – Могилев, 2005. – С. 399–403.
8. Рак, Н.А. Методика расчета прочности при местном сжатии элементов из легкого бетона / Н.А. Рак, В.В. Бондарь // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2011. – № 16 – С. 40–47.
9. Бондарь, В.В. Сопротивление элементов из легкого бетона при местном сжатии / В.В. Бондарь, Н.А. Рак // Современные проблемы расчета железобетонных конструкций зданий и сооружений в аварийные воздействия: сб. докладов Междунар. научной конференции, посвященной 85-летию кафедры железобетонных и каменных конструкций и 100-летию со дня рождения Н.Н. Попова / Министерство образования и науки РФ, НИ МГСУ. – Москва: НИ МГСУ, 2016. – С. 62–67.
10. Цискрели, Г.Д. Прочность легкого бетона на смятие / Г.Д. Цискрели, А.Б. Пирадов, А.С. Кубанейшвили, О.М. Тодрия // Бетон и железобетон. – 1970. – № 6. – С. 18–20.
11. Цейтлин, С.Ю. Прочность бетона на смятие по очень малым площадкам / С.Ю. Цейтлин, Д.И. Яровский // Бетон и железобетон. – 1992. – № 11. – С. 16–17.
12. Соколов, Б.С. Исследования керамзитобетонных элементов при местном действии нагрузки / Б.С. Соколов, И.И. Мустафин // Изв. Вузов. Строительство. – 1995. – № 1. – С. 7–10.
13. Соколов, Б.С. Прочность керамзитобетонных элементов при действии местной нагрузки / Б.С. Соколов, И.И. Мустафин // Инженерные проблемы современного железобетона: Сб. ст.– Иванов, ИВИСИ, 1995.– С. 381–387.
14. Бондарь, В.В. Сопротивление местному сжатию элементов из конструкционного керамзитобетона: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01/ В.В. Бондарь. – Минск, 2017. – 160 с.
15. Соколов, Б.С. Новый подход к расчету бетонных элементов при действии местной нагрузки / Б.С. Соколов // Бетон и железобетон. – 1992. – № 10. – С. 22–25.
16. Еврокод. Основы проектирования строительных конструкций: ТКП EN 1990-2011. – Введ. 01.07.2012. – Минск: Минстройархитектуры Республики Беларусь, 2012. – 70 с.

Материал поступил в редакцию 31.01.2018

BONDAR V.V., RAK N.A. Comparative assessment of design procedures of resistance of locally compressed expanded clay concrete element's

An overview of the design procedures of resistance of locally compressed expanded clay and other types of lightweight concrete elements are presented in publication. An analysis of the design procedure accuracy proposed by the authors of the publication, as well as other methods used in world practice, is made. The possibility of using the design procedure proposed by the authors of this publication for various schemes of local load application is considered.

УДК 624.04.681

Уласевич В.П.

СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ГИБКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ МЕТОДОМ ДЕФОРМАЦИЙ

Постановка задачи. В современных условиях при проектировании различных конструктивных схем зданий и сооружений, а также при разработке конструктивных решений для их усиления, наметилась тенденция на использование конструктивных систем в виде несущих каркасов, решетчатых систем типа ферм и комбинированных систем, составленных из прямолинейных стальных тонкостенных холодногнутых стержней повышенной и высокой прочности. Их

отличительная особенность – сложность учета деформаций узловых соединений, необходимость обеспечить общую устойчивость конструктивной системы, а при оценке их несущей способности – учета местной устойчивости элементов поперечного сечения профилей. Кроме того, такие конструктивные системы и их отдельные стержни обладают повышенной деформативностью, требующей учета геометрической нелинейности, проявляющейся в процессе их дефор-

Уласевич Вячеслав Прокофьевич, к.т.н., профессор кафедры строительных конструкций Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Строительство и архитектура

мирования под расчетной нагрузкой, температурными воздействиями и воздействиями усилий предварительного напряжения.

С точки зрения статического расчета их расчетные модели выделены в общий класс задач – *гибкие стержневые системы* (ГСС) *сложной геометрической структуры*, а расчетные модели отдельных стержней, упруго соединенных в узлах, представим в виде **прямолинейных гибких стержней**, упругое соединение концов которых к узлам предоставит возможность моделировать коэффициентами линейной и угловой податливости. Кроме того, в стержневой системе возможен набор гибких стержней, обладающих продольной жесткостью $EA > 0$ и изгибной жесткостью $EI \geq 0$. В такой постановке предоставляется возможность построить модель практически всех стержневых систем выделенного класса задач.

В основу статического расчета выделенного класса задач положим метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений, конечными элементами (КЭ) в котором будут гибкие стержни. В отличие от метода перемещений, в котором жесткая связь, накладываемая на узел основной системы, запрещает его поворот, но допускает возможное горизонтальное перемещение, в нашем случае на узлы системы накладываем связи, запрещающие не только поворот, но и горизонтальное его смещение. В результате – получаем стержневую систему, стержни которой, нагруженные сплошной поперечной нагрузкой, в общем случае жестко соединены с неподвижными опорами. В таком случае каждый такой стержень с $EA > 0$ и $EI > 0$, примыкающий к неподвижному узлу системы, работает как растянуто-изогнутый, испытывающий в общем случае продольные и угловые деформации.

Заметим, что в такой постановке гибкий стержень *стержневой системы сложной геометрической структуры* можно рассматривать как *универсальный конечный элемент*, а МКЭ с КЭ в виде гибкого стержня, может рассматриваться как *матричный метод деформаций*, упрощенным вариантом которого является классический метод перемещений.

Очевидно, что ставится задача разработать достаточно универсальный метод статического расчета ГСС сложной геометрической структуры, который позволил бы комплексно учитывать их деформированное состояние всех гибких стержней рассчитываемой модели конструктивной системы. Это позволит не только более точно учесть влияние геометрической нелинейности системы, но и установить: возможна ли потеря устойчивости системы в целом, а при выключении стержня ГСС из работы – оценить влияние проявившей себя конструктивной нелинейности на возможность прогрессирующего обрушения.

Таким образом, задача о расчете ГСС сложной геометрической структуры – актуальна как в теоретическом, так и в практическом плане, так как именно такой подход к расчету заложен в стандартах Еврокода 3, принятого с 01.01.2010 г в Республике Беларусь.

1. Краткая характеристика расчета по МКЭ. Идея метода конечных элементов (МКЭ) получила свое развитие применительно дискретному решению континуальных задач в виде пластин и оболочек в 70-х годах прошлого столетия, когда началось широкое применение ЭВМ в решении задач строительной механики, позволившее эффективно использовать матричные операции вычислительной математики.

В расчетах стержневых систем наибольшее применение МКЭ получил в форме метода перемещений. Его отличие от классического метода перемещений состоит в учете влияния на перемещения узловых точек системы не только изгибных, но и продольных деформаций, что достигается наложением на подвижные узлы жестких связей, препятствующих не только их повороту, но и горизонтальному перемещению концов гибких стержней. Это главное отличие основной системы МКЭ от метода перемещений. При этом, с одной стороны усложняется рассчитываемая стержневая модель, так как повышая в общем случае ее статическую неопределимость, при этом повышается точность ее расчета.

Основные положения МКЭ стержневых систем по недеформированной схеме равновесия (линейный расчет) изложены в [1, 2]. Коротко суть МКЭ для стержневых систем: стержневая система разбивается на отдельные конечные элементы (КЭ) такой формы, кото-

рая доступна для оценки напряженно-деформированного состояния его элементов под нагрузкой, прикладываемой в узлах, их взаимодействия между собой, а так же для определения зависимости между силами взаимодействия, деформациями и соответствующими им перемещениями. При воздействии на КЭ узловой поперечной нагрузки МКЭ точность результатов расчета будет зависеть от точности расчета стержней как КЭ примыкающих к узлам основной системы, относительно опорных реакций его начала и конца. Условия сопряжения КЭ с узлами основной системы выполняются на стадии изучения КЭ на основе принятых допущений.

Если известны суммарные реакции во всех узлах основной системы, а в качестве основных неизвестных рассчитываемой системы приняты неизвестные перемещения в местах сопряжения стержней (КЭ) между собой, то систему разрешающих алгебраических уравнений в матричной форме, описывающую условия сопряжения стержневых элементов с учетом непрерывности деформаций и перемещений, сил взаимодействия и условий равновесия с заданной узловой нагрузкой, в обозначениях [2] можно записать так

$$[K] \cdot \{\Delta\} = \{P_U\} + \{P_S\} + \{R\}, \quad (1)$$

где $[K]$ – матрица внешней жесткости свободной системы, каждый элемент которой K_{ij} представляет собой реакцию r_i в i -м направлении от единичного перемещения узла в j -м направлении; $\{\Delta\}$ – вектор неизвестных перемещений узловых точек системы; $\{P_U\}$ – вектор внешних нагрузок, действующих в узлах системы в глобальной системе координат (если на узел наложены внешние связи, то в соответствующих им направлениях перемещения равны нулю); $\{P_S\}$ – вектор реакций начала и конца стержня, от воздействия распределенных по его длине поперечных нагрузок, температурных воздействий, предварительного натяжения с учетом граничных условий закрепления элемента в узлах, и приложенных с обратным знаком к узлам системы; $\{R\}$ – вектор опорных реакций, действующих в узлах, на которые наложены опорные связи (если в узле нет связей, то соответствующие им величины равны нулю).

Если на рассчитываемую стержневую систему действует только узловая нагрузка, то вектор $\{P_S\}$ равен нулю, а решение системы уравнений (1) относительно искомым перемещений возможно только от воздействия на стержневую систему узловой нагрузки. Поэтому при воздействии на КЭ системы поперечной нагрузки необходимо иметь решение, учитывающее ее распределения по его длине для всех возможных способов закрепления концов стержня в узлах, что и позволяет сформировать вектор узловых реакций $\{P_S\}$ в местной системе координат. Тогда вектор $\{P_S\}$, входящий в (2), следует вычислить по формуле

$$\{P_S\} = [T_\alpha]^T \cdot \{P_S'\}, \quad (2)$$

где $[T_\alpha]^T$ – транспонированная матрица преобразований (направляющих косинусов).

В [2] вектор $\{P_S'\}$ строится на готовых решениях стержня как КЭ с разными схемами сплошной поперечной нагрузки и разными условиями закрепления опорных участков стержня к узлам. Для стержня, нагруженного равномерно распределенной и треугольной нагрузкой, значения опорных реакций приведены [2].

Перемещения концов стержневой системы в локальных системах координат связаны с перемещениями в глобальной системе координат (рисунок 2.1) зависимостью [2].

$$\{\delta'\} = [T_\alpha] \cdot \{\delta\}.$$

Связь реакций узлов всей системы $\{r\}$ (2) с реакциями и перемещениями концов ее элементов $\{\delta'\}$ с учетом (1), (2) и (3) осуществляется по формуле

$$\{r\} = [T_\alpha]^T \cdot \{r'\} = [T_\alpha]^T \cdot \{ [K] \cdot \{\delta'\} \} = [T_\alpha]^T \cdot [K] \cdot [T_\alpha] \cdot \{\delta\}. \quad (3)$$

Связь реакций концов КЭ в локальной и глобальной системах координат, записанная в (3), показана на рисунке 2.

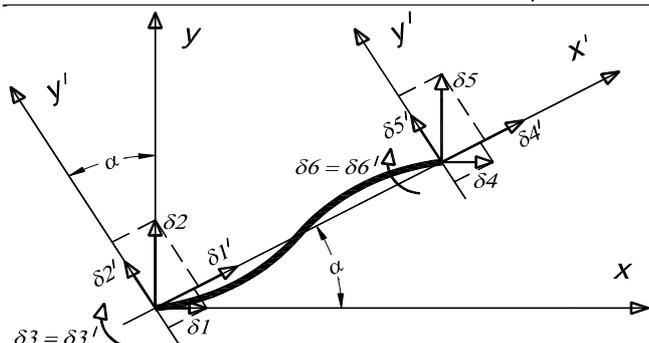


Рисунок 1 – Связь перемещений концов КЭ в локальной и глобальной системах координат

Методика формирования матриц внутренней жесткости $[K]$ КЭ в местной системе координат и матрицы внешней жесткости системы $[K]$, входящей в (1), изложена в [2]. Пример построения матрицы $[K]$ на языке программирования MathCAD приведен в [4].

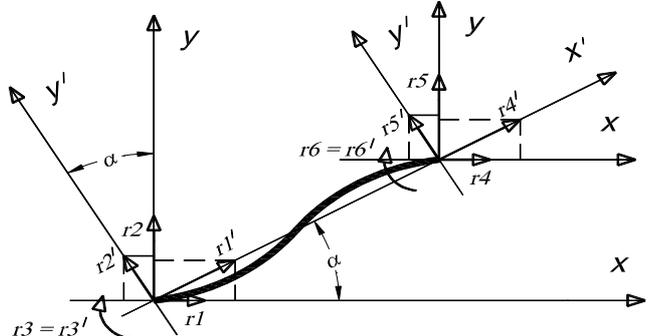


Рисунок 2 – Связь реакций концов КЭ в локальной и глобальной системах координат

Таким образом, точность метода определена методикой вычисления составляющих вектора опорных реакций $\{P_s\}$ на стадии определения напряженно-деформированного состояния гибких стержней, примыкающих к узлам, как входящих в нее конечных элементов (КЭ).

При наложении на стержневую систему внешних связей в системе уравнений (1) матрица внешней жесткости свободной системы $[K]$ преобразуется в матрицу жесткости закрепленной системы $[K^*]$ вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих наложенным связям, при этом, вычеркиванием соответствующих строк в векторах $\{P_u\}$, $\{P_s\}$, $\{R\}$ образуются вектора $\{P_u^*\}$, $\{P_s^*\}$, $\{R^*\}$. Поскольку в результате этих преобразований в векторе $\{R^*\}$ останутся только нулевые элементы, то на данной стадии он может быть исключен. Тогда искомым вектор перемещений в глобальной системе координат будет определен из (2.2) по выражению

$$\{\Delta\} = [K^*]^{-1} \cdot (\{P_u^*\} + \{P_s^*\}), \quad (4)$$

где $[K^*]^{-1}$ – обратная матрица жесткости закрепленной системы для матрицы $[K^*]$.

Тогда действительные усилия $\{r\}$ по концам каждого КЭ в местной системе координат рассматриваемой стержневой модели могут быть вычислены по выражению

$$\{r\} = [K^*] \cdot [T_\alpha] \cdot \{\Delta\} - \{P_s^*\}, \quad (5)$$

где $[K^*]$ – матрица жесткости КЭ в местной системе координат; $[T_\alpha]$ – матрица преобразований координат.

Найденный вектор $\{r\}$ для КЭ позволяет определить внутренние усилия в нем (эпюры внутренних усилий) используя известные в строительной механике зависимости.

Таким образом, при решении стержневой системы по МКЭ с элементами, нагруженными сплошной нагрузкой произвольной интенсивности, трудность расчета состоит в определении вектора $\{P_s\}$. Отсю-

да актуальная задача – получить универсальное решение построения вектора $\{P_s\}$ для КЭ в виде прямолинейного гибкого стержня, нагруженного сплошной нагрузкой произвольной интенсивности $q(x)$, учитывающее возможность изменения изгибной (EI) и продольной (EA) жесткости в широких пределах (от гибкой ванты до балки), а также учета возможных температурных воздействий, и усилий предварительного натяжения, при произвольных граничных условиях.

2. Напряженно-деформированное состояние КЭ в виде гибкого стержня. Для определения вектора $\{P_s\}$ рассмотрим напряженно-деформированное состояние *гибкого стержня* с жестко закрепленными его концами к неподвижным опорам (рисунок 3).

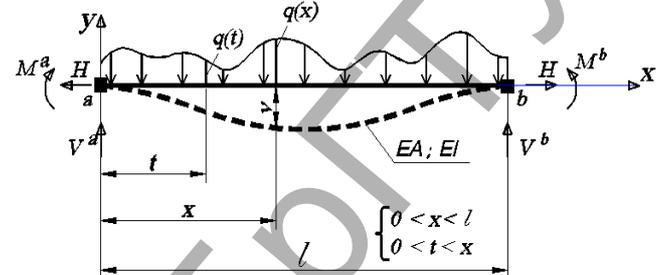


Рисунок 3 – Деформированное состояние прямолинейного гибкого стержня

В качестве *исходного состояния* принимаем невесомый прямолинейный *гибкий стержень* с жесткостными параметрами EA и EI , находящийся в равновесии под воздействием сплошной параметрической нагрузки $q(x)$. Длина заготовки стержня равна пролету L , а его концы в общем случае жестко сопряжены с неподвижными опорами.

Из уравнения равновесия моментов относительно опоры «b» имеем

$$V^a = \frac{1}{l} \left(\int_0^l (l-t) q(t) dt - (M^a - M^b) \right).$$

Тогда изгибающий момент в сечении x стержня равен

$$M = \frac{1}{l} \left(\int_0^l (l-t) q(t) dt - (M^a - M^b) \right) \cdot x - \int_0^x (x-t) q(t) dt + M^a + H \cdot v. \quad (6)$$

Дважды дифференцируя (6) и считая справедливым зависимость $EI \frac{d^2v}{dx^2} = M$,

получим дифференциальное уравнение равновесия прямолинейного гибкого стержня, которое связывает функцию его прогибов v с нагрузкой $q(x)$ и внутренними усилиями

$$\frac{dv^4}{dx^4} - \frac{H}{EI} \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q(x)}{EI}. \quad (8)$$

Входящий в уравнение (8) параметр H/EI следует рассматривать как качественную статическую характеристику гибкого стержня, от значения которой возможны следующие виды его напряженно-деформированного состояния:

- при $H/EI > 0$ гибкий стержень испытывает растяжение с изгибом;
- при $H/EI = 0$ гибкий стержень испытывает только изгиб;
- при $H/EI < 0$ гибкий стержень испытывает сжатие с изгибом.

Пусть $H/EI > 0$. Обозначим $H/EI = a_1^2$, тогда уравнение (8) имеет вид

$$\frac{d^4v}{dx^4} - a_1^2 \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{q(x)}{EI}. \quad (9)$$

Введем обозначения $\frac{d^2v}{dx^2} = z$; $f(x) = -\frac{q(x)}{EI}$.

В результате получим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - a_1^2 z = f(x). \quad (11)$$

Общее решение неоднородного уравнения (11) ищем методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) [3], [5] в виде

$$z = A_1(x) \cdot ch(a_1 x) + A_2(x) \cdot sh(a_1 x), \quad (12)$$

где $A_1(x)$, $A_2(x)$ – некоторые функции, подлежащие определению. Для их нахождения составим систему линейных алгебраических уравнений относительно производных этих функций [5], которая с учетом (10) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} A_1'(x) \cdot ch(a_1 x) + A_2'(x) \cdot sh(a_1 x) &= 0 \\ A_1'(x) \cdot a_1 sh(a_1 x) + A_2'(x) \cdot a_1 ch(a_1 x) &= f(x) \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Поскольку определитель системы (13) не равен нулю как определитель Вронского, находим единственные выражения A_1' и A_2' , проинтегрировав которые, получим

$$\begin{aligned} A_1(x) &= -\frac{1}{a_1} \int f(x) \cdot sh(a_1 x) dx + C_1; \\ A_2(x) &= \frac{1}{a_1} \int f(x) \cdot ch(a_1 x) dx + C_2. \end{aligned} \quad (14)$$

После подстановки (14) в (12), замены переменной интегрирования x на t ($x > t$) и применения формул сложения для гиперболических функций, получим

$$z = C_1 \cdot ch(a_1 x) + C_2 \cdot sh(a_1 x) + \frac{1}{a_1} \int_0^x sh(a_1(x-t)) \cdot f(t) dt. \quad (15)$$

Выполнив подстановку (10) в (15), интегрирования дважды и вычисления кратных интегралов, а так же вычисления постоянных интегрирования с учетом краевых условий

$$v_{|x=0} = 0; \quad v_{|x=l} = 0; \quad v_{|x=0}'' = \frac{M^a}{EI}; \quad v_{|x=l}'' = \frac{M^b}{EI},$$

и некоторых преобразований, получим выражения, описывающие функцию прогибов v и изгибающих моментов M_s :

$$v = -\frac{1}{H} \left[R_b x - \int_0^x (x-t) q(t) dt + M^a - (M^a - M^b) \frac{x}{l} - M_s \right], \quad (16)$$

$$\begin{aligned} M_s &= \frac{r_s}{a_1} sh(a_1 x) - \frac{1}{a_1} \int_0^x sh(a_1(x-t)) q(t) dt + \\ &+ \frac{M^a}{sh(a_1 l)} sh(a_1(l-x)) + \frac{M^b}{sh(a_1 l)} sh(a_1 x), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{где } a_1 = \sqrt{\frac{H}{EI}}; \quad R_b = \frac{1}{l} \int_0^l (x-t) q(t) dt;$$

$$r_s = \frac{1}{sh(a_1 l)} \int_0^l sh(a_1(l-t)) q(t) dt. \quad (18)$$

Функция прогибов (16), а так же ее производные, непрерывны и дифференцируемы, что дает возможность применить известные дифференциальные зависимости.

Функция прогибов (16) и изгибающих моментов (17) содержит три неизвестных: H – горизонтальную составляющую опорной реакции (распор); M^a и M^b – опорные моменты левой и правой опоры, соответственно. Для их определения рассмотрим условия непрерывности линейных и угловых деформаций.

Полные продольные деформации гибкого стержня, вызванные распором H , воздействием на стержень поперечной нагрузки $q(x)$, температурным перепадом Δt° и усилием предварительного натяжения P_n опишем зависимостью [7], которая для прямолинейного незагруженного гибкого стержня в исходном равновесном состоянии имеет вид

$$\frac{H \cdot l}{EA} - \left(\frac{H}{EA} - \frac{1}{2} \right) \frac{D(H)}{H^2} + H(c_n^a - c_n^b) + \left(\alpha \cdot l \cdot \Delta t^\circ - \frac{P_n \cdot l}{EA} \right) = 0, \quad (19)$$

где c_n^a , c_n^b – коэффициенты горизонтальной податливости опорных участков стержня с узлами стержневой системы; $D(H)$ – силовая характеристика гибкого стержня

$$D(H) = \int_0^l \left(R_b - \int_0^x q(t) dt - \frac{1}{l} (M^a - M^b) - \frac{dM_s}{dx} \right)^2 dx. \quad (20)$$

Исходя из условия равенства угловых деформаций концов стержня, вызванных воздействием опорных моментов, с учетом податливости узловых сопряжений имеем:

$$\frac{dv}{dx}_{x=0} = c_\phi^a \cdot M^a; \quad \frac{dv}{dx}_{x=l} = c_\phi^b \cdot M^b, \quad (21)$$

где c_ϕ^a , c_ϕ^b – коэффициенты угловой податливости сопряжения опорных участков гибкого стержня с жесткими узлами основной системы, к которым он примыкает.

Вычислив производную от функции прогибов (16), и ее значения при $x=0$ и $x=l$, после подстановки в (21) и несложных преобразований получим систему уравнений относительно опорных моментов M^a и M^b в виде

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{th(a_1 l) - a_1 l}{H \cdot l \cdot th(a_1 l)} - c_\phi^a \right) \cdot M^a - \frac{sh(a_1 l) - a_1 l}{H \cdot l \cdot sh(a_1 l)} \cdot M^b &= -\frac{dv}{dx}_{x=0; M^a=0; M^b=0} \\ \frac{sh(a_1 l) - a_1 l}{H \cdot l \cdot sh(a_1 l)} \cdot M^a - \left(\frac{th(a_1 l) - a_1 l}{H \cdot l \cdot th(a_1 l)} - c_\phi^b \right) \cdot M^b &= -\frac{dv}{dx}_{x=l; M^a=0; M^b=0} \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

При известных значениях M^a и M^b вертикальные реакции V^a и V^b равны

$$V^a = R_b - \frac{1}{l} (M^a - M^b); \quad V^b = \int_0^l q(t) dt - V^a. \quad (23)$$

Решения, построенные на функции прогибов (16) справедливы и при $H/EK < 0$, если в (17), (23) и других выражениях, полученных путем ее дифференцирования, гиперболические функции заменить на тригонометрические.

Система уравнений (22) относительно опорных моментов M^a и M^b нелинейная, так как выражения, стоящие при M^a и M^b , являются нелинейными функциями угловых деформаций левого и правого опорных участков стержня, зависящими от распора H .

Заметим, что система (22) совместно с (19) позволяет смоделировать различные варианты крепления концов КЭ в узлах системы.

Таким образом, решение уравнений (22) совместно с (19), построенные на аналитическом решении (16), являются основными разрешающими уравнениями рассчитываемого состояния гибкого стержня как КЭ, так как решение этих уравнений позволяет определить опорные реакции для его опорных концов. Следовательно, после расчета всех КЭ закрепленной системы, получим возможность сформировать вектор $\{P_s\}$ в локальной системе координат, а также вычислить векторы $\{P_{sj}\}$ (3) и $\{r\}$ (2) в глобальной системе координат.

Открывается возможность вычислить вектор $\{\Delta\}$ (4) из решения матричной системы уравнений (1), а, следовательно, и вектор $\{r\}$ (5) содержащего опорные реакции концов каждого прямолинейного гибкого стержня, входящего в рассчитываемую стержневую систему. Тогда функция прогибов (16) и изгибающих моментов M_s (17) становятся определенными однозначно с учетом линейных и угловых деформаций гибкого стержня. Углы поворота сечений и поперечную силу следует определить дифференцированием функций v (16) и M_s (17).

Гибкий стержень и его решение в виде уравнений (19) и (22) позволяют описать все возможное многообразие НДС гибких стержней сложной геометрической структуры:

При $El \rightarrow 0$ силовая характеристика гибкого стержня (20) совпадает с характеристикой нагрузки, известной в теории гибкой нити, а нелинейное трансцендентное уравнение (19) превращается в кубическое расчета гибкой нити в возмущенном состоянии.

При $H \rightarrow 0$ второй член дифференциального уравнения (8) равен нулю, поэтому уравнение (8) преобразуется к виду, описывающему поперечный изгиб простой балки. Следовательно, функция прогибов (16), являющаяся решением уравнения (8), при $H \rightarrow 0$ справедлива и для балки с защемленными концами, находящейся под воздействием поперечной сплошной нагрузки, описанной произвольной функцией $q(x)$.

Таким образом, функция прогибов V (16) и изгибающих моментов M_s (17), а также полученная на их основе система разрешающих уравнений (22) совместно с (19) позволяют сформировать вектор $\{P_s\}$ для всех видов напряженно-деформированного состояния гибких стержней. Следовательно, система матричных уравнений (1), описывающая напряженно-деформированное состояние гибких стержней рассчитываемой системы произвольной геометрической структуры становится разрешимой однозначно вплоть до вычисления вектора $\{r\}$ (5), содержащего действительные значения опорных реакций его концов.

Поскольку гибкий стержень как КЭ системы в состоянии моделировать работу гибких или жестких вант, балок, а также сжатых изогнутых стержней при произвольном сопряжении их между собой, это подтверждает, что его можно рассматривать как *универсальный конечный элемент* МКЭ. С другой стороны, поскольку с его помощью можно описать и решить все многообразие НДС КЭ стержневой системы произвольной геометрической структуры, то рассматриваемый МКЭ с КЭ в виде гибкого стержня может рассматриваться как *метод деформаций* [6], [7] в матричной форме.

3. Учет деформированной схемы равновесия. Ввиду возможности существенного влияния продольных деформаций гибких стержней на общее напряженно-деформированное состояние стержневых систем сложной геометрической структуры, и в особенности – на величины перемещений узлов, их расчет должен быть выполнен по деформированной схеме равновесия. Заметим, что в этом случае система основных разрешающих уравнений МКЭ вида (1) справедлива только для *исходного состояния* деформированной системы. В *рассчитываемом состоянии* будем рассматривать деформированное состояние равновесия системы, в которое она переходит из *исходного* под воздействием параметров, возмущающих исходное состояние. Тогда, уравнения (1) представим так

$$[K(\Delta)] \cdot \{\Delta\} = \{P_u\} + [T_\alpha]^T \cdot \{P_s'\} + \{R\}. \quad (24)$$

Для решения нелинейной системы уравнений МКЭ (24), описывающей переход балочно-вантовой системы из *исходного состояния* в *рассчитываемое*, разработан итерационный способ «последовательных увязок», основные положения которого изложены в [4].

Заключение. Разработан метод формирования и расчета моделей стержневых систем сложной геометрической структуры с учетом геометрической нелинейности продольных и угловых деформаций гибкого стержня как универсального КЭ, построенный на основе матричной системы уравнений МКЭ (1). При необходимости учета геометрической нелинейности всей стержневой системы предложена матричная система геометрически нелинейных уравнений (24), а также метод его решения способом «последовательных увязок» [4].

Изложенный метод статического расчета моделей плоских стержневых систем сложной геометрической структуры дает возможность построить эффективный алгоритм ядра программы для ПК средствами программирования математической среды MathCAD с последующей разработкой к нему интерфейса для ввода исходной информации и обработки результатов расчета на других языках программирования высокого уровня.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник для строит. спец. вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 8-е изд. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.
2. Игнатьев, В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие / В.И. Игнатьев. – Брест, 2004. – 172 с.
3. Уласевич, В.П. Деформационный расчет и исследование напряженно-деформированных состояний пологих однопоясных распорных систем: автореф. дис. ...канд. техн. наук: 01.02.03 / В.П. Уласевич; ЦНИИСК им. Кучеренко. – М., 1984. – 24 с.
4. Уласевич, В.П. Деформационный расчет гибких балочно-вантовых систем методом конечных элементов в среде MathCAD / В.П. Уласевич, О.В. Костюк // Вестник БрГТУ. – 2004. – № 1(25): Строительство и архитектура. – С. 111–117.
5. Матвеев, Н.М. Дифференциальные уравнения: учебное пособие / Н.М. Матвеев. – М.: Просвещение, 1988. – 256 с.
6. Рабинович, И.М. Основы строительной механики стержневых систем / И.М. Рабинович. – М.: Госстройиздат, 1960. – 256 с.
7. Борисевич, А.А. Строительная механика / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатьев – Минск: БНТУ, 2007. – 821 с.

Материал поступил в редакцию 18.04.2018

ULASEVICH V.P. Static calculation of flexible rod systems of complex geometrical structure by method of deformations

In article on the basis of MKE equations in the form of the method of movements and the equations of balance of the rectilinear flexible core which is rigidly fixed to motionless support and loaded by continuous loading of any intensity the matrix system of the universal allowing equations is developed for static calculation of flat flexible rod systems of complex geometrical structure.

Are brought allowing the equations of deformation calculation of a rectilinear flexible core as the universal rod KE constructed on the analytical solution of his differential equation of balance in integrated quadratures concerning function of deflections. The equations allow to create a vector column of reactions $\{P_s\}$ from influences of KE of cross continuous loadings of any intensity, temperature influences, a preliminary tension distributed on length, taking into account any boundary conditions of fixing of KE in knots. It allows to consider a rectilinear flexible core as universal rod KE thanks to which the matrix system of the equations of MKE degenerates in a method of deformations.

УДК 624.042.42

Матвеев Е.В.

ОБОБЩЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ СНЕГОВОЙ НАГРУЗКИ

Введение. На величину снеговых нагрузок на здание сильно влияет ветер, который перераспределяет частицы снега через метелевый перенос. Наиболее высокие снеговые нагрузки на здания, как правило, вызваны метелевым переносом снега [1]. Положения действующих ТНПА учитывают более распространенные формы снеговых наносов, но рекомендуют исследования на масштабных или численных моделях (или их комбинациях) для интерпретации

положений и помогают определять снеговые нагрузки для случаев, когда форма крыши отличается от форм, представленных в ТНПА. Кроме того, когда объекты на прилегающей территории (такие как близлежащие более высокие здания или топографические объекты) генерируют необычные потоки ветра над крышей, численное и масштабное моделирование может быть использовано для обнаружения необычных распределений снеговой нагрузки.

Матвеев Евгений Викторович, ст. преподаватель кафедры архитектуры Брестского государственного технического университета. Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.