1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1980-1987	400	$\frac{321}{1985}$	$\frac{498}{1983}$	0,13	0,61	8	93	90	84	77	70	64	61
1988-2011	401	$\frac{277}{2003}$	$\frac{546}{2004}$	0,16	0,12	24	97	92	85	77	69	62	57

Примечание. Выделены статистически различимые величины.

По метеостанции Василевичи статистически значимые различия в средних величинах суммарного испарения наблюдаются в мае, июне и августе, а по метеостанции Полесская – сентябре и октябре. Комплексный анализ климатических параметров, влияющих на величину суммарного испарения, показал, что вектора этих воздействий не остаются постоянными внутри сезона, а имеют тенденцию изменять свое направление, что в ряде случаев приводит к компенсации их воздействий. Так, отмечаемое повсеместно повышение температуры воздуха, которое должно приводить к росту суммарного испарения, уравновешивается снижением средней скорости ветра, что приводит к уменьшению суммарного испарения, и в итоге значимых изменений в величинах суммарного испарения не наблюдается. Можно говорить лишь о некоторых тенденция в его колебаниях.

Заключение. Таким образом, можно говорить о некоторой тенденции изменения режима суммарного испарения на территории Белорусского Полесья, вызванные природными и антропогенными факторами.

Полученные предварительные результаты требуют дальнейших всесторонних исследований, ввиду сложности и актуальности поставленной задачи оценки суммарного испарения.

УДК 551.492

Волчек А.А., Махнист Л.П., Рубанов В.С., Гладкий И.И.
УО «Брестский государственный технический университет», г.Брест

СХОДИМОСТЬ МОМЕНТОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА

This research work deals with the model of several years' fluctuation of the river flow, which was received by applying the stochastic differential equation of Ornstein–Uhlenbeck. The process under consideration is the homogeneous in terms of time Markow process of diffusion type with corresponding coefficient of drift and diffusion. It gives the opportunity to evaluate the mathematical expectation and the moments of frequency distribution of the river flow. In comparison with the use of numerical integration of the differential equations system our research work studies the convergence of obtainable solution presented in power series.

Рассмотрим марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть $\bar{V}$ – среднегодовой расход воды, а V_t – расход воды в момент времени t. Тогда, полагая $X_t = (V_t - \bar{V})/\bar{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна-Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma\, dW_t, \qquad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс (так что $\frac{dW_t}{dt} = W_t'$ – обобщенный случайный процесс белого шума с параметром $\sigma = C_V\sqrt{2k}$), C_V – коэффициент вариации, k^{-1} – время релаксации речного стока.

Орнштейна–Уленбека процесс является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с коэффициентом сноса $a(t,x) = -kx$ и диффузии $\sigma(t,x) = \sigma^2$, переходная плотность вероятности $p(t, x, y)$ которого является фундаментальным решением соответствующего уравнения Фоккера–Планка (т.е. прямого уравнения Колмогорова) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial y}(yp) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

где коэффициент k определяется по формуле $k = -\ln r$, так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид $e^{-k\tau}$, а r – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ сток равен x, а x_* – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение V будет находиться в полуинтервале $[x_*,\infty)$ при условии, что $x \in [x_*,+\infty)$. Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ, однородны по времени, обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x,y) = -kx\frac{\partial}{\partial x}p(t,x,y) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}. \qquad (2)$$

Пусть T – момент времени, в который значение V покинет промежуток $[x_*,+\infty)$.

Тогда $prob(T \geq t) = G(t,x), G(t,x) = \int\limits_{x_*}^{+\infty} p(t,x,y)dy$.

Так как функция $1 - G(t,x)$ является распределением случайной величины T, то моменты n-ого порядка времени достижения границы x_* определяются соотношениями $T_k = -\int\limits_0^{+\infty} t^k \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt = \int\limits_0^{+\infty} kt^{k-1}G(t,x)dt$.

Интегрируя по t на интервале от 0 до $+\infty$ соотношение (2), получаем следующие уравнения для T_n:

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_n}{dx^2} - kx\frac{dT_n}{dx} = -nT_{n-1}, \text{ при } \frac{dT_n}{dx}(+\infty) = 0,\ T_n(x)\big|_{x=x_*} = 0\ (T_0 = 1).$$

Введя безразмерные величины

$$kT_1 = \theta_1,\ k^2T_2 = \theta_2,\ x\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x}{C_V} = \xi,\ x_*\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x_*}{C_V} = \xi_*,$$

приходим к системе для оценки математического ожидания T_1 и среднего квадратичного отклонения $\sqrt{T_2 - T_1^2}$:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_2}{d\xi} = -2\theta_1, \frac{d\theta_i}{d\xi}(+\infty) = 0, \theta_i(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0 \qquad (3)$$

Система (3), приведенная в [1], при решении различных прикладных задач интегрировалась численными методами. В данной работе рассматриваются вопросы сходимости решения системы (1), записанного в виде степенных рядов [3]:

$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$, $\theta_2(\xi) = 2\left(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\right)$, где

$$S_1(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}, \tag{4}$$

$$S_2(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\left(\ln\left(2-2\left\{\frac{k-1}{2}\right\}\right)-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{1}{m-\left\{\frac{k}{2}\right\}}\right)\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}, \tag{5}$$

а $[t]$ и $\{t\}$ – целая и дробная часть числа t соответственно.

Степенной ряд (4) получен в [2]. В [2] предложено теоретическое обоснование асимптотического поведения математического ожидания, рассматриваемого распределения вероятностей многолетних колебаний речного стока, широко используемого в практике гидрологических расчетов. Предлагаемая в [3] методика решения уравнений вида (3) обобщена на более широкий класс уравнений такого типа, для чего исследовались функции специального вида, связанные соотношениями с интегралами Эйлера первого и второго рода и неполной гамма-функцией. Сходимость ряда (4) рассматривалась в [3].

Исследуем решение $\theta_2(\xi) = 2\left(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\right)$ на сходимость, где

$$S_2(\xi) = A_2(\xi) - B_2(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\ln 2 - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right|\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right]\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}.$$

Общие члены этих рядов $a_n^{(2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\ln 2 - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ и $b_n^{(2)} = \left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ удовлетворяют соотношениям

$a_{n+1}^{(2)} = \frac{c_{n+1}(2n+1)\xi^2}{c_n(2n+2)(2n+3)}a_n^{(2)}$, $c_{n+1} = c_n - \frac{1}{2n+1}$, $a_0^{(2)} = c_0\xi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $c_0 = \ln 2$ и

$b_{n+1}^{(2)} = \frac{d_{n+1}(2n+2)\xi^2}{d_n(2n+3)(2n+4)}b_n^{(2)}$, $d_{n+1} = d_n + \frac{1}{2n+2}$, $b_1^{(2)} = d_1\frac{\xi^4}{12}$, $d_1 = \frac{1}{2}$.

Заметим, что $\left|\frac{c_{n+1}(2n+1)}{c_n(2n+2)}\right| < 1$, если $n \geq 5$ и $\frac{d_{n+1}(2n+2)}{d_n(2n+3)} < 1$, если $n > 4$.

Используя признак Д'Аламбера, имеем

$\left|\frac{a_{n+1}^{(2)}}{a_n^{(2)}}\right| = \frac{|c_{n+1}|\xi^2(2n+1)}{|c_n|(2n+2)(2n+3)} < \frac{\xi^2}{2n+3} < q < 1$, если $n \geq \max\left(\frac{\xi^2}{2q} - 1{,}5; 5\right)$ и

$$\frac{b_{n+1}^{(2)}}{b_n^{(2)}} = \frac{d_{n+1}(2n+2)\xi^2}{d_n(2n+3)(2n+4)} < \frac{\xi^2}{2n+4} < q < 1 \text{, если } n > \max\left(\frac{\xi^2}{2q} - 2; 4\right)$$

Следовательно, остатки рядов $A_2(\xi), B_2(\xi)$ удовлетворяют неравенствам: $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^{(2)}\right| \le \frac{\left|a_n^{(2)}\right|}{1-q}$, $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k^{(2)} \le \frac{b_n^{(2)}}{1-q}$ и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q.

Таким образом, значения рядов $A_2(\xi)$, $B_2(\xi)$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$, можно получить, вычисляя n-ые частичные суммы этих рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)}$, $\sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(2)}$, если выполняются неравенства:

$$\left|a_n^{(2)}\right| \le \varepsilon(1-q)\text{, } b_n^{(2)} \le \varepsilon(1-q)\text{, и } n \ge n_0 = \max\left(\left[\frac{\xi^2}{2q}\right]; 5\right). \qquad (6)$$

Следовательно, точность 2ε вычисления значений $S_2(\xi), S_2(\xi_*)$ обеспечивается вычислением n-ых частичных сумм рядов при выполнении условий (6), что гарантирует точность 4ε вычисления значения $S_2(\xi) - S_2(\xi_*)$.

Рассмотрим пример, приведенный в [1]. Пусть среднегодовой сток Волги $\overline{V} = 239$ км^3/год (объем выборки $n = 113$), среднеквадратичное отклонение равно 46 км^3/год. Тогда $C_v = 0,19$. Если коэффициент корреляции r между смежными значениями стока равен 0,42, тогда $k = -\ln 0,42 \cong 0,9$ год$^{-1}$, $\sigma = 0,257$ год^{0,5}, $\sigma^2 = 0,066$ год$^{-1}$. Предположим, что в начальный момент времени $V = 377$ км^3/год. Через сколько лет сток достигнет 101 км^3/год, т.е. уменьшится на шесть среднеквадратичных отклонений (276 км^3/год)? В данном случае $\xi_* = -3$ (это отклонение от среднегодового значения стока, взятое в долях C_V), а времени перехода стока от одного состояния к другому соответствует $\xi = 3$.

Таблица 1 – Расчетные данные модели

ξ_*	ξ					
	-2	-1	0	1	2	3
-3	76,50 (85,55)	84,84 (86,13)	86,93 (86,16)	87,83 (86,17)	88,36 (86,17)	**88,71 (86,17)**
-2		8,34 (9,97)	10,43 (10,26)	11,33 (10,30)	11,85 (10,31)	12,21 (10,32)
-1			2,09 (2,42)	3,00 (2,59)	3,51 (2,63)	3,87 (2,64)
0				0,90 (0,92)	1,43 (1,03)	1,78 (1,07)

В соответствии с таблицей, полученной с использованием решения системы (4), (5) и условий (6) $\theta_1 = 88,71$, а размерное время составляет

$$m_t = \frac{\theta_1}{k} = 88,71 : 0,9 \approx 98,6 \text{ лет, } \sigma_T = \frac{\sqrt{\theta_2 - \theta_1^2}}{k} = 86,17 : 0,9 \approx 95,74$$

Результаты исследований можно применить при расчете и прогнозе многолетних колебаний речного стока рек Беларуси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – М., 2002. – Том 29, № 1. – С. 62–67.

2. Волчек, А.А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь: сборник материалов Международной научно-технической конференции, Брест, 26–28 апреля 2010 г. – Брест: БрГТУ, 2010. – С. 45–49.

3. Волчек, А.А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Веснік Брэсцкага універсітэта. – Брест, 2010. – № 1: Физика, математика. – С. 68–77.

УДК 556.166(476)

Волчек А.А. [1], **Шелест Т.А.** [2]

[1] УО «Брестский государственный технический университет», г.Брест,

[2] УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», г.Брест

РАЙОНИРОВАНИЕ ТЕРРИТОРИИ БЕЛАРУСИ ПО СИНХРОННОСТИ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ МАКСИМАЛЬНЫХ РАСХОДОВ ВОДЫ ДОЖДЕВЫХ ПАВОДКОВ

Division into districts of territory of Belarus on synchronism of fluctuations of the maximum rainfall discharges is spent. It is allocated five hydrological areas. Results are presented in figures and in the table.

Введение

Районирование территории является одним из важнейших приемов географической науки. Оно широко применяется в гидрологических исследованиях как один из приемов обобщения в целях определения в качественной или количественной форме гидрологических характеристик. В гидрологических расчетах с помощью районирования и последующего математического анализа определяют гидрологические характеристики в тех случаях, когда карты изолиний стока ограничены в применении или вообще не применимы [1].

Эта проблема является весьма актуальной и для Беларуси, где в условиях современной густоты гидрометрической сети определение основных гидрологических характеристик нередко осуществляется при отсутствии данных наблюдений.

Цель настоящей работы – определение однородных гидрологических районов Беларуси по синхронности многолетних колебаний максимальных расходов воды дождевых паводков.

Исходные данные и методика исследования

Для изучения цикличности и синхронности многолетних колебаний стока используются различные методы: графические (сопоставление хронологических графиков стока, интегрально-разностных кривых, сглаженных колебаний) и аналитические (корреляционный, спектральный и многомерный анализ, сглаживание и фильтрация, модели авторегрессии и скользящего среднего, прогнозирование) [2]. Методика объединения гидро-