Леонард Коршун
Брестский инженерно-
строительный институт

ОПТИМИЗАЦИЯ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ УЧЕТЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ РАБОТЫ МАТЕРИАЛА

Предлагается метод и алгоритм оптимизации металлических ферм, материал которых характеризуется нелинейно-упругой работой. Исходной диаграммой "напряжение-деформация" для каждого элемента может являться как диаграмма, описанная аналитически, например, по степенной зависимости

$$\sigma_j = A_j \, \varepsilon_j^{x_j} \; ; \quad 0 < x \geq 1 \qquad (1)$$

где A_j, x_j – параметры материала j-го стержня, характеризующие его упругие свойства, так и полученная экспериментально.

И в том и в другом случае упомянутая диаграмма для каждого элемента или группы элементов, отличающихся упругими свойствами материала, приводится существующими методами к полилинейной диаграмме (рис. 1), т.е. аппроксимируется полилинейной диаграммой.

Известными должны быть узловые точки этой диаграммы (ε_k и σ_k) и модули упругости (E_k) в каждой линейной области работы материала.

Для полученной диаграммы справедливыми являются соотношения:

$$E_k = \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}} \; , \quad E_{k+1} = \frac{\sigma_{k-1} - \sigma_k}{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k} \qquad (2)$$

$$\sigma = \sigma_{k-1} + E_k(\varepsilon - \varepsilon_{k-1}) \quad \text{или} \qquad (3)$$
$$\sigma = \sigma_k - E_k(\varepsilon_k - \varepsilon)$$

Соотношения (2) и (3) являются законом Гука для каждого линейного участка. В то же время каждый линейный участок имеет свою линейную зависимость работы материала.

Так как в соответствии с теоремой Л.Леви-Рабиновича для статически неопределимых ферм равнопрочного решения не существует в общем случае, то в процессе оптимизации, особенно, при учете различных ограничений задачи (условий жесткости, конструктивных ограничений), получится решение, при котором различные стержни окажутся в различной степени напряжения. Следовательно при учете полилинейной диаграммы работы материала в общем случае необходимо учитывать возможность работы каждого стержня на любом линейном участке диаграммы. Чтобы решить задачу оптимизации в этом случае необходимо заранее знать, на каком линейном участке диаграммы будет работать каждый стержень в оптимальном решении.

Решение данной задачи предлагается осуществлять итерационным путем с использованием метода оптимизации шарнирно-стержневых систем, разработанного автором ранее на случай линейно-упругой работы материала (*). Суть итерационного подхода состоит в следующем.

Находятся начальные значения переменных параметров $\sigma_j^{(0)}$, $x_j^{(0)}$ путем решения задачи оптимизации при линейно-упругой работе материала и $E_j = const$ упомянутым методом. Т.е. решается задача:

$$\min \{ V(z) \mid z \in R \}$$

$$R = \{ z \mid p(z) = 0,\ g(z) \geq 0 \},\ z = (x, \sigma), \tag{4}$$

где $p(z) = 0$ – условия совместности деформаций, а
$g(z) \geq 0$ – условия реального проектирования и постановки задачи.

Задача (4) – условная много экстремальная нелинейная задача математического программирования, которая введением функций $sgn\, N_j$ и $sgn\, \sigma_j$ заменяется одноэкстремальной выпуклой задачи математического программирования и решается модифицированным методом Франк и Вулфа.

В задаче (4) деформации элементов входят лишь в условия совместности деформаций и допустимых жесткостей системы, которые имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{z} \frac{\sigma_j}{E_j} \bar{N}_{ji} S_j = 0, \quad i = \overline{1,n} \\ &\sum_{j=1}^{z} \frac{\sigma_j}{E_j} \bar{N}_{j\xi} S_j \leq y_\xi, \quad \xi = \overline{1,u} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

или

$$\sum_{j=1}^{z} \varepsilon_j \bar{N}_{ji} S = 0 \quad ; \quad \sum \varepsilon_j \bar{N}_{j\xi} S \leq y_\xi \tag{6}$$

По найденным значениям $\sigma_j^{(1)}$ выявляется, в какой линейной области диаграммы (рис. I) работает каждый элемент фермы. С учетом этого и формируется математическая модель задачи оптимизации (4) второго шага итерационного процесса. Особенности ее формирования состоит в следующем.

Из зависимостей (3) получаем деформации элементов с учетом их работы только на одном линейном участке диаграммы.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_j &= \frac{\sigma_j}{E_{jk}} - \frac{\sigma_{jk-1}}{E_{jk}} + \varepsilon_{jk-1} \\ &\text{или} \\ \varepsilon_j &= \frac{\sigma_j}{E_{jk}} - \frac{\sigma_{jk}}{E_{jk}} + \varepsilon_{jk} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

С учетом (7) условия (6) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{z} \frac{\sigma_j}{E_{jk}} \bar{N}_{ji} S &= \sum_{j=1}^{z} \frac{\sigma_{jk-1}}{E_{jk}} \bar{N}_{ji} S - \sum_{j=1}^{z} \varepsilon_{jk-1} \bar{N}_{ji} S_i \\ \sum_{j=1}^{z} \frac{\sigma_j}{E_{jk}} \bar{N}_{jf} S &\le \sum_{j=1}^{z} \frac{\sigma_{jk-1}}{E_{jk}} \bar{N}_{jf} S - \sum_{j=1}^{z} \varepsilon_{jk-1} \bar{N}_{jf} S + y_f \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

От условий (6) ограничения (8) отличаются лишь свободными членами (правой частью). Кроме этого вводятся ограничения на принадлежность каждого стержня к одному из линейных участков диаграммы, имеющие вид

$$\sigma_{jk-1} \le \sigma_j \le \sigma_{jk} \qquad (9)$$

Далее решается задача оптимизации (4) второго шага с учетом ограничений (8), (9), а также дифференцированных значений E_j и находятся значения переменных $\sigma_j^{(2)}$ и $x_j^{(2)}$.

После этого уточняется принадлежность каждого стержня к той или иной линейной области работы и повторяется решение задачи (4) с учетом (8), (9). Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока линейная область работы каждого стержня перестанет меняться.

Если для некоторых стержней значения σ_j окажутся равными напряжениям узловых точек диаграммы, то необходимо работу этих стержней перевести в смежную линейную область и решение задачи оптимизации в линейно-упругой постановке повторить.

Как показали численные исследования, достаточно выполнить 3–4 перерасчета (шага), чтобы точно установить область линейной работы каждого элемента и получить окончательное решение оптимизационной задачи.

ж Коршун Л.И. Практический метод оптимизации ферменных конструкций. Республиканский межведомственный научно-технический сборник "Гидромелиорация и гидротехническое строительство", "Вища школа", Львов. 1976.

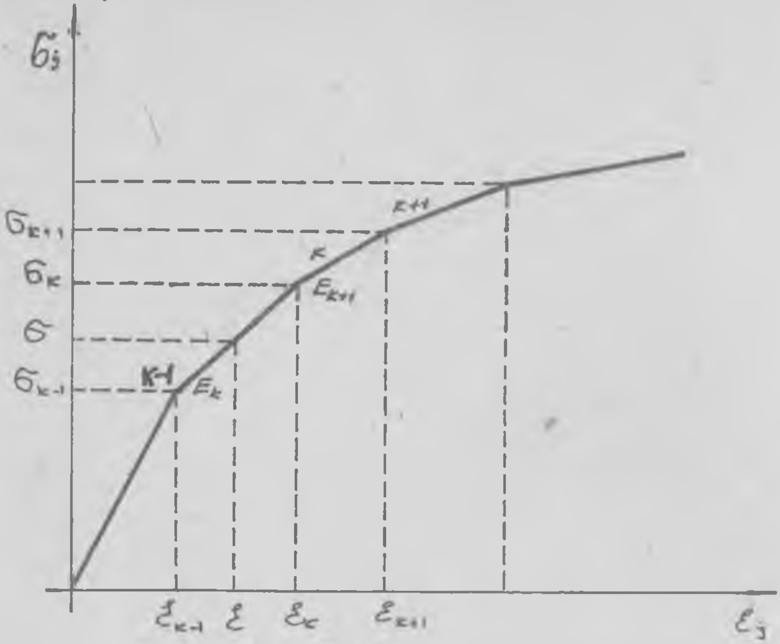

Рис.1.