Иван Сырокваш‍ко
Брестский инженерно-строительный институт

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФЕРМ ПРИ УЧЕТЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК И ОГРАНИЧЕНИЙ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Ставится задача при заданной геометрии фермы и действующих на нее постоянных по величине и направлению, а также изменяющихся по гармоническому закону нагрузках подобрать площади поперечных сечений стержней при соблюдении следующих требований:

1) теоретический объем стержней фермы должен быть минимальным;
2) напряжения во всех стержнях не должны превышать допустимых значений;
3) частота собственных колебаний системы должна быть не менее заданной величины;
4) максимальный прогиб любого из узлов не может превосходить допускаемого значения;
5) гибкость каждого стержня не превышает предельной величины.

При решении задачи приняты следующие допущения:

1. Система линейно деформируема.
2. Учитываются только вертикальные перемещения узлов.
3. Форма колебаний основного тона соответствует форме статического прогиба от постоянной нагрузки.

Задачу можно сформулировать в виде общей задачи нелинейного математического программирования:

минимизировать целевую функцию

$$V=\sum_{i=1}^{n} F_i l_i \tag{I}$$

при ограничениях

$$\psi_1=(F)=\frac{1}{E}\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i\cdot\bar{N}_i l_i}{F_i}-[f]\leq 0; \tag{2}$$

$$\psi_2(F)=\omega-[\omega]\geq 0; \tag{3}$$

$$\psi_j(F) = \frac{|N_i^Q + m \cdot N_i^P|}{F_i} - [G] \leq 0; \qquad (4)$$

$$\psi_k(F) = F_i - [F] \geq 0; \qquad (5)$$

(i = I, 2,...,n); (j = 3, ..., 3 + n); (k = n+4, ..., $2n$+3),

где n – число стержней фермы;

V – объем материала;

F_i , l_i – площадь поперечного сечения и длина i-го стержня;

N_i – полное усилие в i-ом стержне;

$\bar{N}_i$ – усилие в i-ом стержне от единичной силы, приложенной в узле, перемещение которого ограничивается;

ω – основная частота собственных колебаний фермы;

N_i^Q – усилие в стержне от постоянной нагрузки;

N_i^P – усилие в стержне от амплитудных значений возмущающих сил;

m – динамический коэффициент;

$[f]$, $[\omega]$, $[F]$, $[G]$ – соответственно предельные допустимые значения полного прогиба, частоты собственных колебаний системы, конструктивной площади сечения стержня и напряжения в стержне.

Для растянутых стержней $[G] = R$, для сжатых $[G] = \varphi R$, где φ – коэффициент продольного изгиба, R – расчетное сопротивление материала.

Для учета собственного веса системы массу каждого стержня можно привести к его концам поровну или другим каким-либо способом.

Так как площади поперечных сечений стержней являются переменными параметрами и заранее неизвестны, то для определения частоты собственных колебаний системы с конечным числом степеней свободы точным способом пришлось бы раскрывать в общем виде детерминант k-го порядка, что практически представляет собой задачу трудноразрешимую. В данной работе основная частота определяется по приближенной формуле Граммеля [I] .

$$\omega^2 = \sum_{j=1}^{m} m_j y_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i^2 l_i}{EF},$$

где m_j и y_i - масса и перемещение j-го узла фермы от статической нагрузки;

N_i - усилие в i-ом стержне, вызванное условной нагрузкой $m y$.

В такой постановке сформулированная нелинейная задача математического программирования может быть выпуклой и невыпуклой. Как показали теоретические исследования гессианов функций ограничений задачи невыпуклость имеет место в направлении переменных параметров, соответствующих слабонапряженным стержням решетки и оказывающих малое влияние на величины перемещений узлов.

Основная трудность при решении задач нелинейного математического программирования заключается в том, что задача может оказаться многоэкстремальной, и решение приведет к одному из локальных экстремумов. Перебор же всех локальных экстремумов совершенно неэффективен, так как требует не только их отыскания, но и удачного выбора исходных точек, из которых можно было бы попасть в новые локальные экстремумы, а не в обнаруженные ранее.

В настоящей работе предлагается решение находить методом возможных направлений Зойтендейка [2]. При этом алгоритм расчета имеет следующий вид:

I. Вначале необходимо задаться предельными гибкостями всех стержней и определить коэффициенты продольного изгиба. По предельной частоте собственных колебаний определяется динамический коэффициент.

2. Нахождение опорного решения.

Принимаются произвольные значения неизвестных площадей сечений, заведомо удовлетворяющие любому из ограничивающих неравенств. Из данной точки . многомерного пространства осуществляется спуск на границу области допустимых решений в направлении антиградиента целевой функции до встречи с первой ограничивающей поверхностью в точке

$$\bar{F}^o = \bar{F}^н - \bar{\nabla} t$$

где $\bar{\nabla}$ - градиент целевой функции в исходной точке, t - наименьший положительный корень уравнений

$$\psi_j (F_i^н + \nabla_i t) = 0; \; (j = 1, \ldots, m);$$

m - число ограничивающих неравенств.

В полученной таким образом точке определяется значение целевой функции V^0.

3. Отыскание направления нового спуска.

Прежде всего необходимо установить, которым из ограничивающих неравенств с заданной точностью δ удовлетворяет точка F^0. Пусть оказалось, что

$$-\delta < \psi_k(F^0) < \delta$$

Для определения направления спуска решается задача линейного программирования:

минимизировать форму $u = \eta$

при ограничениях:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial F_1^0} z_1^0 + \dots + \frac{\partial \psi_k}{\partial F_n^0} z_n^0 - \eta \le 0;$$

$$\frac{\partial V}{\partial F_1^0} z_1^0 + \dots + \frac{\partial V}{\partial F_n^0} z_n^0 - \eta \le 0;$$

$$|z_i^0| \le 1; \ (i = 1, \dots, n)$$

Решение этой задачи с помощью симплекс-метода дает искомые направления z_1^0, ... , z_n^0.

4. Определение шага спуска.

Решаются уравнения

$$\psi_j(F_i^0 + z_i^0 t) = 0$$

и вычисляется наименьший положительный корень этих уравнений.

Далее находится новая точка $\bar{F}^1 = \bar{F}^0 + \bar{z}^0 \cdot t$ и новое значение целевой функции V^1.

Если разность ($V^1 - V^0$) больше наперед заданной величины, то весь процесс вычислений, начиная с п. 3, повторяется.

После нахождения оптимального при первоначальных условиях решения можно приступить к следующему циклу расчетов. Для этого необходимо уточнить собственный вес фермы, определить частоту собственных колебаний и вычислить динамический коэффициент для полученной системы. Коэффициенты продольного изгиба уточняются по подобранным из сертамента сечением стержней. Рекомендуется для ускорения сходимости итерационного процесса принимать новые значения динамического коэффициента и коэффициентов продольного изгиба равными средним значениям между ранее принятыми и полученными в конце предыдущего цикла.

Расчет оканчивается, когда значения объема материала, полученные в конце двух соседних циклов будут совпадать с заданной точностью.

Описанный алгоритм включает в себя ряд однотипных вычислительных опираций, использует метод линейного программирования и эффективен при применении ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

I. Бицено К., Граммель Р. Техническая динамика, Госстройиздат, 1950, т. I.

2. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. М., Изд-во иностр. лит., 1963.