Вячеслав Уласевич
Брестский инженерно-
строительный институт

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ КРУГОВОГО КОНТУРНОГО КОЛЬЦА

В практике проектирования и строительства большепролетных зданий широкое применение находят пологие гибкие радиально-стержневые системы покрытий, пролетная часть которых представляет собой радиальную сетку из гибких стержней шарнирно соединенных одним концом в общий узел, а другим - с упругим контурным кольцом [1]. При расчете таких систем по деформированной схеме их напряженно-деформированное состояние сильно зависит от поперечных деформаций контурного кольца [2]. Аналитическое решение задачи об изгибе кругового контурного кольца совместно с методом расчета пологих гибких стержней [3] дает возможность сформировать систему разрешающих уравнения для прочностного расчета радиально-стержневых систем по деформированной схеме. Поэтому такое решение представляет на наш взгляд актуальную задачу.

При отыскании решения приняты следующие допущения:

пренебрегаем тангенциальной составляющей распоров вследствие малости горизонтальных перемещений общего узла в сравнении с радиусом кольца;

полагаем, что радиальная сетка воздействует на круговое контурное кольцо сплошной упругой средой произвольной интенсивности $P(\varphi)$ (рис. I);

ось кругового контурного кольца считаем несжимаемой.

Для отыскания функций изгибающих моментов, поперечных и продольных сил воспользуемся дифференциальными зависимостями изгиба плоского криволинейного стержня [4], которые при воздействии только сплошной радиальной нагрузки $P(\varphi)$ запишем соответственно так:

$$\frac{d^2 M}{d\varphi^2} + M = C - \rho^2 P(\varphi), \qquad (I)$$

$$Q = -\frac{1}{\rho}\frac{d\mathcal{M}}{d\varphi}, \tag{2}$$

$$N = -\frac{1}{\rho}\frac{d^2\mathcal{M}}{d\varphi^2} - \rho P(\varphi), \tag{3}$$

где: ρ - радиус кольца; C - константа.

Общее решение уравнения (I) ищем методом вариации постоянных. При условиях (рис. I), что

$$\mathcal{M}|_{\varphi=0} = \mathcal{M}_0; \quad Q|_{\varphi=0} = Q_0; \quad N|_{\varphi=0} = N_0$$

общее решение уравнения (I) имеет вид

$$\mathcal{M}(\varphi) = \mathcal{M}_0 - N_0\rho(1-\cos\varphi) - Q_0\rho\sin\varphi - -\rho^2\int_0^{\varphi} P(\psi)\sin(\varphi-\psi)\,d\psi \tag{4}$$

Функция (4) позволяет воспользоваться уравнением Буссине

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\rho^2}{EY}\mathcal{M}(\varphi) \tag{5}$$

Общий интеграл уравнения (5) с учетом функции изгибающих моментов (4) отыскивался методом вариации произвольных постоянных и, после вычисления кратных интегралов по формуле Дирихле и некоторых упрощений, имеет вид:

$$u = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi + \frac{\rho^2}{EY}(\mathcal{M}_0 - \rho N_0)(1-\cos\varphi) + + \frac{\rho^3}{2EY}N_0\varphi\sin\varphi - \frac{\rho^3}{2EY}Q_0(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - -\frac{\rho^4}{2EY}\int_0^{\varphi}P(\psi)\sin(\varphi-\psi)\,d\psi + \frac{\rho^4}{2EY}\int_0^{\varphi}(\varphi-\psi)P(\psi)\cos(\varphi-\psi)\,d\psi \tag{6}$$

Функция (4) состоит из слагаемых изгибающих моментов в кольце от внутренних сил $\mathcal{M}_0, Q_0, N_0$ и внешней нагрузки $P(\varphi)$:

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0, \quad \mathcal{M}_2 = -N_0\rho(1-\cos\varphi); \quad \mathcal{M}_3 = -Q_0\rho\sin\varphi; \quad \mathcal{M}_P = -\rho^2\int_0^{\varphi}P(\psi)\sin(\varphi-\psi)\,d\psi. \tag{7}$$

Для определения $\mathcal{M}_0, Q_0, N_0$, входящих в (4) составим следующую систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}\mathcal{M}_0 + \delta_{12}N_0 = -\Delta_{1p}; \\ \delta_{21}\mathcal{M}_0 + \delta_{22}N_0 = -\Delta_{2p}; \\ \delta_{33}Q_0 = -\Delta_{3p}. \end{cases} \tag{8}$$

Коэффициенты и свободные члены определяем по формуле Мора с использованием слагаемых (7) при: $\mathcal{M}_0$=I; Q_0=I; N_0=I.

В результате решения системы (8) относительно внутренних сил $\mathcal{M}_0, Q_0, N_0$ и подстановки их значений в (4), а также в (2) и (3), получим:

$$\mathcal{M}(\varphi) = \frac{\rho}{\ }(S_1 + S_2\cos\varphi - S_3\sin\varphi) - \rho^2\int_0^{\varphi}P(\psi)\sin(\varphi-\psi)\,d\psi, \tag{9}$$

$$Q(\varphi)=\frac{1}{2\pi}(S_2\sin\varphi-S_3\cos\varphi)+\rho\int_0^{\varphi}P(\psi)\cos(\varphi-\psi)\,d\psi, \qquad (10)$$

$$N(\varphi)=\frac{1}{2\pi}(S_2\cos\varphi-S_3\sin\varphi)-\rho\int_0^{\varphi}P(\psi)\sin(\varphi-\psi)\,d\psi. \qquad (11)$$

Здесь: $S_1=\rho\int_0^{2\pi}P(\psi)\,d\psi$; $\quad S_2=\rho\int_0^{2\pi}P(\psi)\psi\sin\psi\,d\psi$;

$$S_3=\rho\int_0^{2\pi}P(\psi)\psi\cos\psi\,d\psi. \qquad (12)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 входящих в (6), нами приняты следующие условия замкнутости кольца:

$$\int_0^{2\pi}u\sin\varphi\,d\varphi=0; \qquad \int_0^{2\pi}u\cos\varphi\,d\varphi=0 \qquad (13)$$

Условия (13) получены из предпосылки о несмещаемости центра масс кругового контурного кольца.

Условия (13) совместно с (6) позволили получить функцию перемещений в замкнутом виде, которую удобно представить так

$$u=\frac{\rho^3}{4\pi EJ}\Big(2S_1+S_2(\cos\varphi+\pi\sin\varphi+\varphi\sin\varphi)-S_3(\sin\varphi-\pi\cos\varphi-\varphi\cos\varphi)-\tfrac{1}{2}(S_4\sin\varphi+S_5\cos\varphi)\Big)-\frac{\rho^4}{2EJ}\Big(\int_0^{\varphi}P(\psi)\sin(\varphi-\psi)\,d\psi-\int_0^{\varphi}(\varphi-\psi)P(\psi)\psi^2\cos\psi\,d\psi\Big), \qquad (14)$$

где:

$$S_4=\rho\int_0^{2\pi}P(\psi)\psi^2\sin\psi\,d\psi; \qquad S_5=\rho\int_0^{2\pi}P(\psi)\psi^2\cos\psi\,d\psi. \qquad (15)$$

Пользуясь формулой (16) [3] квадратуры функций (9), (10) и (14) со сплошной нагрузкой $P(\psi)$ легко заменить на дискретную форму с массивами распоров H_i радиальной сетки. Тогда функции перемещений (14), изгибающих моментов (9), поперечных (10) и продольных (11) сил можно представить в такой форме:

$$u_i=\frac{\rho^3}{4\pi EJ}\Big(2S_1+S_2(\cos\varphi_i+\pi\sin\varphi_i+\varphi_i\sin\varphi_i)-S_3(\sin\varphi_i-\pi\cos\varphi_i-\varphi_i\cos\varphi_i)-\tfrac{1}{2}(S_4\sin\varphi_i+S_5\cos\varphi_i)\Big)-\frac{\rho^4}{2EJ}\Big(\sum_{k=1}^{n_\varphi}H_k\sin(\varphi_i-\psi_k)-\sum_{k=1}^{n_\varphi}H_k(\varphi_i-\psi_k)\cos(\varphi_i-\psi_k)\Big). \qquad (16)$$

$$M_i=\frac{\rho}{2\pi}(S_1+S_2\cos\varphi_i-S_3\sin\varphi_i)-\rho\sum_{k=1}^{n_\varphi}H_k\sin(\varphi_i-\psi_k); \qquad (17)$$

$$Q_i=\frac{1}{2\pi}(S_2\sin\varphi_i+S_3\cos\varphi_i)+\sum_{k=1}^{n_\varphi}H_k\cos(\varphi_i-\psi_k); \qquad (18)$$

$$N_i=\frac{1}{2\pi}(S_2\cos\varphi_i-S_3\sin\varphi_i)+\sum_{k=1}^{n_\varphi}H_k\sin(\varphi_i-\psi_k). \qquad (19)$$

Здесь: $S_1=\sum_{k=1}^{n}H_k$;

$S_2=\sum_{k=1}^{n}H_k\psi_k\sin\psi_k$; $\qquad S_3=\sum_{k=1}^{n}H_k\psi_k\cos\psi_k$;

$S_4=\sum_{k=1}^{n}H_k\psi_k^2\sin\psi_k$; $\qquad S_5=\sum_{k=1}^{n}H_k\psi_k^2\cos\psi_k$.

Таким образом получено аналитическое решение задачи об изгибе кругового контурного кольца при воздействии на него произвольной радиально направленной уравновешенной системы сосредоточенных сил. Это решение позволяет совместно с системой разрешающих уравнений для гибкого стержня [3] сформулировать и решить нелинейную контактную задачу о взаимодействии контурного кольца и радиальной сетки из гибких стержней, а следовательно, создает условия для разработки общего метода расчета пологих радиально-стержневых систем по деформированной схеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шимановский В.Н. Висячие системы. - Киев: Будівельник, 1984, 208 с.

2. Москалев Н.С. Конструкции висячих покрытий. - М.: Стройиздат, 1980, 331 с.

3. Уласевич В.П. Деформационный расчет и исследования напряженно-деформированных состояний пологих однопоясных распорных систем. Автореферат диссертации. ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко. - М., 1984, 24с.

4. Ржаницын А.Р. Строительная механика. - М.: Высшая школа, 1982, 400 с.

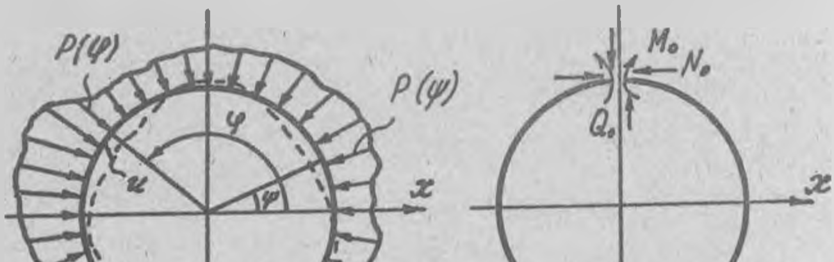

Рис. 1