Н.П. Семенчук, В.Т. Дацык (Беларусь, г.Брест)

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

В работе вводится нелинейное дифференциальное уравнение нецелого порядка вида:

$$y^{(\alpha)}=f(x,\ y,\ y',\ y'',\dots\ y^{(n-1)}), \qquad (1)$$

где $n\text{-}1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}$.

Для уравнения (1) при начальных условиях:

$$D^{-(1-\alpha)}y(0)=y_0^{(n-1)}=D^{-(2-\alpha)}y(0)=y_0^{(n-2)}=\dots=D^{-(n-\alpha)}y_0=y_0=0, \quad (2)$$

где $D^{-(\varphi)}\ y(x)$–дробный интеграл порядка $\varphi>0$ функции $y=y(x)$, доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема: Если функция f в правой части уравнения (1) абсолютно интегрируема на параллелепипеде

$$\Pi_{\ell h_j}=\left\{(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})\in\mathbb{R}^{n+1}\ \middle|\ \begin{array}{c}0\le x\le\ell\\ y_0^{(j)}-h_j\le y^{(j)}\le y_0^{(j)}+h_j\\ j=0,1,\dots,n-1\end{array}\right\}$$

и абсолютно непрерывна для любых функций $y=y(x)$ с абсолютно непрерывной производной $(n\text{-}1)$ – порядка на отрезке $[0,\ \ell]$, и для любых точек $M_1(x,\ y_1,\ y_1',\dots,\ y_1^{(n-1)})$, $M_2(x,\ y_2,\ y_2',\dots,\ y_2^{(n-1)})\in\Pi_{\ell h_j}$ выполняется неравенство:

$$\left|f(M_1)-f(M_2)\right|\le A\sum_{j=0}^{n-1}\left|y_1^{(j)}-y_2^{(j)}\right|,$$

где A–положительная константа, то уравнение (1) имеет единственное решение в кассе $L^{(j)}(\ 0,\ \ell)$, удовлетворяющее начальным условиям (2), если будет выполнятся неравенство

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\ell^{\alpha}}{\alpha}+\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(j-1))\ell^{\alpha-j}\right)<1.$$

Через $L^{(j)}(\ 0,\ \ell)$ обозначен класс абсолютно интегрируемых на отрезке $[0,\ \ell]$ функций $y=y(x)$ с абсолютно непрерывной производной $(n\text{-}1)$-го порядка и нормой

$$\|y(x)\|=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^{\ell}\left|y^{(j)}(x)\right|dx.$$