ПРОЕКЦИОННО–ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ С АНАЛИЗОМ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРОЕКТА

Борисевич А.А.
БГПА, г.Минск

Основой выбора направления движения поисковой точки к оптимальному проекту является информация о чувствительности ограничений к изменению переменных проектирования (ПП). Связь между вариацией ПП и значением ограничительной функции устанавливается с помощью коэффициентов чувствительности (КЧ). При "выходе точки" к границе области допустимых решений (ОДР) следует проанализировать запасы по ограничениям, распределение КЧ и, при необходимости, организовать последующее движение ее по границе области. Эта схема поиска сводится к проекционно-градиентным методам.

Рассмотрим вначале случай с одним активным ограничением (например, ограничением на перемещение некоторого узла конструкции). Заменим поверхность $g_j(x) = 0$, соответствующую этому ограничению, на киперплоскость $((x–x^{(k)}), a) = 0$.

Градиент ограничительной функции $\nabla g = a$ и антиградиент целевой функции направлены за пределы ОДР. С помощью скалярных произведений можно сформировать требование для определения вектора $\xi^{(k)}$, обеспечивающего максимальное уменьшение целевой функции и не выводящего точку за пределы ОДР. Решение соответствующей задачи сведется к определению p антиградиента на гиперплоскость, следовательно $\xi = p/|p|$. Проекция определится по выражению:

$$p = r - \frac{(r, a)}{|a|^2} a$$

Если $(r, a) = |r| \cdot |a|$, т.е. антиградиент ортогонален $((x–x^{(k)}), a) = 0$, то $p = 0$ и $x^{(k)}$ – экстремальная точка.

Распространение этого подхода на вариант с несколькими активными ограничениями $g_j = 0 (j = \overline{1, l})$ после построения соответствующих касательных гиперплоскостей и определения проекции антиградиента p_j на каждую из них позволяет установить направление движения поисковой точки.

Вектор p_j может быть принят как допустимый на очередном шаге оптимизации в том случае, если $(pj, ak) \le 0$, $(k=1, 2, ..., l; j\neq k)$, т.е. скалярные произведения его с векторами остальных $l–1$ ограничений отрицательны. Это означает, что среди скалярных произведений

$$\begin{gathered}(p_1, a_2), (p_1, a_3), \ldots, (p_1, a_l),\\ (p_2, a_1), (p_2, a_3), \ldots, (p_2, a_l),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (p_l, a_1), (p_l, a_2), \ldots, (p_l, a_{l-1})\end{gathered}$$

в j-той строке все произведения должны быть отрицательны.

Среди всех p_j возможно существование только одного вектора, для которого выполняется требуемое условие, либо такого вектора нет. В первом случае движение по направлению этого вектора обеспечит наибольшее уменьшение целевой функции и при этом не будут нарушены линеаризованные ограничения задачи. Во втором случае необходимо определить $p^{(l)}$–проекцию вектора r на линейное многообразие, образованное пересечением всех (l) гиперплоскостей. Условие ортогональности $p_{(l)}$ ко всем a_j позволяет получить выражение:

$$p^{(l)} = \left[E - A_l\left(A_l^T \cdot A_l\right)^{-1} \cdot A_l^T\right] \cdot r = P \cdot r$$

где: A_l – матрица, в столбцах которой записаны компоненты векторов a_j;

P – проектирующая матрица.

Направляющий вектор для очередного шага оптимизации определяется отношением $\xi^{(k)} = p^{(l)} \big/ \left|p^{(l)}\right|$, если $\left|p^{(l)}\right| \neq 0$.

Для варианта $\left|p^{(l)}\right| \neq 0$ следует установить знаки множителей Лагранжа μ. Если все $\mu \geq 0$, то решение закончено. Если некоторые $\mu_i < 0$, то соответствующее ограничение исключается из анализа, проекционная матрица строится на l–1 ограничениях и процесс повторяется.

Для исследователей информация о количественных соотношениях матриц P, построенных с помощью различных активных ограничений, является основанием к всестороннему обследованию свойств конструкции в окрестности оптимального плана и инструментом для доказательства выполнения необходимых условий оптимальности.

Аппроксимация границы ОДР касательными гиперплоскостями приведет к тому, что найденное направление ξ фактически на любой длине шага будет выводить поисковую точку за пределы области. Поэтому, после шага вдоль ξ необходимо предусматривать движение внутрь области по направлению суммы антиградиентов нарушенных ограничений.

По изложенной методике автором формировались проекционные матрицы в задачах поиска оптимального проекта стального каркаса трехпролетного (3 х 24 м) промышленного цеха с крановыми нагрузками для условий Белоруссии. Размерность ПП–4. При известной конфигурации сечения за первую неизвестную принималась площадь сечения надкрановой части крайних колонн, второй неизвестной являлась площадь сечения надкрановой части средних колонн, третья и четвертая неизвестные – площади сечения подкрановых частей соответственно крайних и средних колонн. Общее число ограничений – 44. Расчетные сочетания нагрузок, на которые рассчитывалась рама, были получены объединением всех нагрузок в пять загружений. Напряженное состояние элементов каркаса на каждом шаге оптимизации определялось в отдельных программных модулях по СНиП.

Вторым исследуемым объектом являлась преднапряженная металлическая ферма покрытия пролетом 42 м. Размерность ПП–10. Расчетных загружений – 2. Общее число ограничений – 20. Эта задача поиска оптимальной конструкции рассматривалась как тест для разработанной методики оптимизации (по варианту замены затяжки известным усилием преднапряжения ферма превращается в статически неопределимую).

Выбор наиболее активных ограничений в этих задачах осуществляется для всех загружений системы и с учетом объединения элементов в унифицированные группы. Эти особенности вносят определнную погрешность в вычислительный процесс проекционно-градиентного метода. Условия минимальных запасов по ограничениям являлись определяющими для отнесения их к активным.

Выбирая N–1 активное ограничение, мы определяем линию пересечения гиперплоскостей в N-мерном пространстве ПП. С помощью матрицы P определяется проекция вектора $\nabla f = -r$ на эго пересечение. Соотношение компонент полученного касательного вектора указывает направление продвижения к оптимальному плану. Это есть наиболее жесткая форма определения направления. Она приемлема тогда, когда среди множества ограничений явно определяются активные и число их близко к размерности пространства. Лучший вариант в практической реализации этой задачи получается для случая с одним активным ограничением.

Опыт проведенных вычислений позволили установить следующее:

1. В окрестности оптимального решения КЧ для активных ограничений существенно возрастают, иногда меняют знаки, и поэтому элементы проекционной матрицы даже при незначительных изменениях компонент плана могут заметно отличаться от соответствующих значений на предыдущем плане.
2. Из полученных результатов следует, что в условиях реального проектирования (соблюдение требований СНиП, требований унификации, наличие множества загружений) необходимые условия Лагранжа могут не выполняться. Выполнение этих условий возможно лишь тогда, когда для рассчитываемой по идеализированной схеме конструкции преобладающим из всех загружений будет только одно.
3. Вследствие множества загружений условие $P\ r = 0$ не выполняется. Хотя некоторые компоненты векторов не равны нулю, анализ КЧ по наиболее активным ограничениям показывает на невозможность улучшения решения.