це этим условием является условие равенства нулю перемещения (угла поворота).

$$\lambda_n^{прав}\left(\varphi_n^{прав}\right) = Pb_{11}^{0} X + Pb_{12}^{0} = 0\,, \qquad (11)$$

откуда

$$X = -\frac{Pb_{12}^{0}}{Pb_{11}^{0}}\,. \qquad (12)$$

Зная параметр X, мы полностью определяем вектор-столбец начального состояния. Дальнейший расчет бруса или вала осуществля-ется по формуле продолжения (1). По формулам аналогичным (8), (9), (11), (12) производится расчёт при других видах граничных условий.

На основании рассмотренного метода разработан алгоритм и сос-тавлены программы расчёта брусьев и валов с произвольным количест-вом участков при различных условиях опирания (свободный конец, жёсткая заделка, опора с зазором, упругая опора) на обоих концах. В программе так же учитывается и промежуточные упругие опоры, а при расчёте брусьев учитываются и температурная нагрузка. Результаты расчётов представляются в виде таблицы и графиков.

Данные программы могут использоваться студентами при выполнении расчётно графических работ по сопротивлению материалов, а так же при проведении конструкторских расчётов в интерактивном режиме.

Литература

1. Пономарев К.К. Расчёт элементов конструкций с применением ЭЦВМ, М., Машиностроение, 1972.

К РЕШЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Хвисевич В.М.
Брестский политехнический институт

Рассмотрим тело вращения, ограниченное поверхностью S. На S задана осесимметричная функция температуры

где z, r — координаты цилиндрической системы отсчета,
t — время.

В такой постановке будем иметь задачу типа Дирихле. В зависимости от того, следует ли искать решение внутри области D, ограниченной поверхностью S, или вне области говорят соответственно о внутренней или внешней краевой задаче Дирихле.

В виду осевой симметрии области D и функции T достаточно рассмотреть меридиональное сечение области. Решение внутренней задачи разыскиваем в виде теплового потенциала:

$$W(x,t)=W(\rho_x,z_x,t)=\int_L \mu(y,\tau)\cdot K(y,x,t-\tau)dl, \qquad (1)$$

где

$$K(y,x,t-\tau)=\exp\left(-\frac{z_y^2+\rho_x^2+\rho_y^2}{4a(t-\tau)}\right)\left[cI_1(B)-BI_0(B)\right],$$

x, y — фиксированная и текущая точки интегрирования,

m — плотность потенциала W, a — коэффициент температуропроводности, L — контур, ограничивающий область D,

$B=\dfrac{2\rho_y\rho_x}{4a(t-\tau)}$, I_1, I_0 — сомножители функции Бесселя.

При этом учтем, что фундаментальное решение уравнения теплопроводности представляется согласно [1] функцией:

$$T^*(x,t,y,\tau)=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-\tau)}}\right)^3 \exp\left(-\frac{r^2(x,y)}{4a(t-\tau)}\right), \qquad (2)$$

где r (x,y) — расстояние между точками x (x_1, y_1, z_1), y (x_1, x_2, x_3).

В цилиндрической системе координат $r=\sqrt{Z^2+\rho_x^2+\rho_y^2-2\rho_x\rho_y\cos\theta}$;

$Z=z_y-z_x$, $\theta=\vartheta_y-\vartheta_x$, τ — текущее время на интервал интегрирования.

Предположим, что на контуре L распределены двойные тепловые источники (1) с плотностью m=(y, t). При этом от совокупности воздействия источников внутри области D^+ получилось распределение температуры, переходящее на границе области непрерывно в

f(y, t)=F_T.

Таким образом, с учетом формул разрыва для теплового потенциала двойного слоя [2] получаем:

$$-\frac{1}{2}\mu(x,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L\mu(y,\tau)K(y,x,t-\tau)\rho dl_y=F_T. \qquad (3)$$

Уравнение (3) является линейным интегральным уравнением второго рода в двумерном измерении L, t. Оно носит Фредгольмов характер по переменной L и имеет признак уравнения Вольтера по переменной t. Ядро этого уравнения имеет сингулярную особенность в точке $x=y$.

Решением уравнения будет плотность m (y,t), с помощью которой можно найти температуру в любой точке области D, в любое время t.

Подобным образом можно поставить и решить краевую задачу во внешней области D^-. На основании проведенных выкладок было получено интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2}\mu(x,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L\mu(y,\tau)K(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y=F_T. \qquad (4)$$

Реализация этого уравнения позволяет найти значение температуры в любой точке внешней области D^-.

В инженерной практике часто приходится иметь дело с заданны-ми тепловыми потоками (производными от температур в определенных направлениях), то есть речь идет о задаче типа Неймана [3]. Для реше-ния таких задач используем тепловой потенциал простого слоя:

$$V(x,t)=\frac{2a}{\pi}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^3}\int_L\nu(y,\tau)P(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y, \qquad (5)$$

где $P(y,x,t-\tau)=\exp\left(-\frac{z^2+\rho_y^2+\rho_x^2}{4a(t-\tau)}I_0(B)\right)$,

n (y,t) — плотность потенциала простого слоя.

Потенциал (5) зависит только от положения параметрической точки x и это обстоятельство учитываем при определении производной теплового потенциала по нормали n_x, опущенной из точки x к поверхности S. Выполняя дифференцирование получим:

$$\frac{dV(x,t)}{dn_x}=\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L \nu(y,\tau)P^*(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y, \qquad (6)$$

где $P^*(y,x,t-\tau)=\exp\left(-\frac{z^2+\rho_y^2+\rho_x^2}{4a(t-\tau)}\right)\left[cI_0(B)+dI_1(B)\right],$

$c=\alpha_{zx}z_1-\alpha_{\rho_x}\rho_x;\ d=\alpha_{\rho_x}\cdot\rho_y,\ \alpha_{zx},\alpha_{\rho_x}$ — направляющие косинусы.

Считаем, что температурный режим приведен к однородному. Тогда тепловой процесс представляем происходящим от некоторого теплового слоя с плотностью n (y,t), распределенного по контуру L с учетом заданных краевых условий.

Используя формулы скачка [2] получим:

— для внутренней задачи

$$\frac{1}{2}\nu(x,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L \nu(y,\tau)P^*(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y=F_p, \qquad (7)$$

где $F_p=f_1(y,t)$ — тепловой поток;

— для внешней задачи

$$-\frac{1}{2}\nu(x,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L \nu(y,\tau)P^*(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y=F_p \qquad (8)$$

Кроме рассмотренных выше случаев немаловажное значение в практике имеет конвективный теплообмен между поверхностью тела и окружающей средой.

Здесь имеют место следующие граничные условия:

$$\lambda_T\frac{\partial T(y,t)}{dn}=h\left[T_0-T(y,t)\right], \qquad (9)$$

где l_T — коэффициент теплопроводности, h — коэффициент теплопередачи, n — нормаль к поверхности S.

Исследуя величины условия (9) очевидно, что решения данной задачи можно получить с помощью теплового потенциала (5).

Таким образом, с учетом формул скачка [2] получаем интегральные уравнения для неизвестной плотности n (y,t).

$$\pm\frac{1}{2}\nu(x,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L\nu(y,\tau)\,P^*(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y+$$

$$+\frac{ab_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left[2\sqrt{a(t-\tau)}\right]^5}\int_L\nu(y,\tau)\,P(y,x,t-\tau)\rho_y dl_y=b_0T_0, \tag{10}$$

где $b_0=\dfrac{2h}{\lambda_T}$, знак "+" имеет место для внутренней задачи, "-" — для внешней.

Ядра полученных интегральных уравнений имеют сложный характер. В них имеется произведение показательной функции на модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого или первого порядка. Наличие двойных интегралов усложняет численную реализацию соответствующей краевой задачи на ПЭВМ.

Для преодоления указанных трудностей были выведены соответствующие разрешающие уравнения.

Таким образом, решение краевых осесимметричных задач теплопроводности сводится к решению соответствующих интегральных уравнений (2), (3), (6), (7), (9).

При этом, по сути пространственная задача теплопроводности сводится к интегрированию по контуру меридионального сечения области *D*, что существенно облегчает численную реализацию задачи с высокой степенью точности на ПЭВМ. Для достижения этой цели разработан соответствующий алгоритм решения.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский Л.А. Уравнения математической физики.— М. Наука, 1974.

2. Хижняков А.В. К расчету температурных полей для тел вращения. В ст. "Проектирование металлических конструкций". ЦИНИС Госстроя СССР, 1973, вып. 3, с 47.

3. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее приложение к задачам математической физики. М.-Л., ГТТИ, 1953.