той (3а и 3б - серендиповского типа, 3в и 3г - паскалевского типа). Применение указанных функций к ряду модельных задач для тел с трещинами показывает достоверность получаемых результатов.

Представляется, что следующим шагом для сингулярных элементов является введение для функции $F_1(\xi,\eta)$ выражений:

для четырехугольника $F_1(\xi,\eta) = -(1-\xi)(1-\eta)((1+\xi)^2+(1+\eta)^2-1/4)$ (4)

для треугольника $F_1(\xi,\eta) = (1-2\xi-\eta)((1+\xi)^2+(1-\eta)^2-1/4)$ (5)

которые обеспечат для напряжений выполнение особенности $\sqrt{1/r}$ на любом из радиальных направлений от вершины трещины. Геометрически последние сомножители в (4)-(5) соответствуют окружности радиуса R=1/2, построенной вокруг сингулярной точки. При этом КЭ превращаются в кубические, а тип полноты аппроксимации остается прежним.

Литература

1. О. Зенкевич, К. Морган. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986,-318с.

2. Е.М. Морозов, Г.П. Никишков. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1990, -256с.

3. В.Н. Апанович. Метод внешних конечно-элементных аппроксимаций. Мн.: Выш. шк.,1991,-171с.

РАСЧЁТ БРУСЬЕВ НА СЖАТИЕ И ВАЛОВ НА КРУЧЕНИЕ МЕТОДОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Мазырка М.В., Савченко В.А.
Брестский политехнический институт

В инженерной практике часто приходится осуществлять прочност-ной анализ элементов конструкций, расчетная схема которых может быть сведена к схеме бруса или вала переменной жесткости при различ-ных условиях его опирания и нагружения. Получение аналитического решения для этих задач связано с определенными трудностями и яв-ляется весьма проблематичным. Поэтому приходится прибегать к численным методам решения подобного класса задач. Одним из таких методов является метод продолжения.

В основу метода продолжения, как известно, положено дифференциальное уравнение задачи и его последующие производные. Применение матричный формулировки и в особенности получение на этой основе матрицы участков и переходов в сочетании с спользованием матричный формулы продолжения (см. ниже) образуют алгоритм решения граничных задач методом продолжения [1], основывающийся на матричной зависимости

$$\vec{Y}_k = P\vec{Y}_0, \qquad (1)$$

где $\vec{Y}_0$ - начальное напряженно-деформированные состояние;

$\vec{Y}_k$ - напряженно-деформированное состояние в k -ом сечении системы;

P - матрица воздействия, представляющая собой получаемое по формуле продолжения произведение соответствующих матриц пролетов и переходов

$$P = \prod_{i=k}^{1} A_i(l_i)F_{i-1}. \qquad (2)$$

Входяшие в формулу (2) матрицы участков, как уже было сказано выше, определяются из дифференциального уравнения

$$L_n\left[\vec{Y}\right] = \vec{R}(x), \qquad (3)$$

где $L_n\left[\vec{Y}\right]$ - линейный дифференциальный оператор;

$\vec{R}(x)$ - произвольная вектор-функция действительного аргумента,

записанного для каждого конкретного i -го участка.

Матрицы участков при растяжении и сжатии, таким образом, запишутся в следующем виде:

а) при сжатии б) при кручении

$$A(l_i)=\begin{bmatrix} 1 & \frac{l_i}{E_i F_i} & \frac{q_i l_i^2}{2! E_i F_i} \\ 0 & 1 & q_i l_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_i(l_i)=\begin{bmatrix} 1 & \frac{l_i}{G_i J_{pi}} & \frac{m_i l_i^2}{2! G_i J_{pi}} \\ 0 & 1 & m_i l_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Матрицы скачков F_i определяются из рассмотрения условий сопряжения граничных точек смежных интервалов. Поскольку разбиение брусьев и валов на участки осуществляется таким образом, что все внешние сосредоточенные силы и моменты сил попадают в узловые j -е точки (граничные точки участков), то при переходе через эти точки статические компоненты векторов претерпевают разрывы, при этом

$$\vec{Y}_j^{прав} = F_j \vec{Y}_j^{лев} \qquad (5)$$

Здесь F_i - матрица перехода (скачка) которая имеет следующий вид

а) при сжатии б) при кручении

$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & P_j \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & M_j \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где P_j, M_j - внешние сосредоточенные силы и моменты сил.

Вектор напряженно-деформированного состояния в произвольной точке имеет вид:

а) при сжатии б) при кручении

$$\vec{Y}_j = \begin{bmatrix} \lambda & N & 1 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \vec{Y}_j = \begin{bmatrix} \varphi & N & 1 \end{bmatrix}^{-1} \qquad (7)$$

где λ - перемещение в течке j;

φ - угол поворота в точке j;

N, M - продольная сила и крутящий момент в точке j соответственно.

При решении граничных задач для рассматриваемых систем одна из компонент вектора $\vec{Y}_0^{лев}$ неизвестна. В качестве неизвестной полагаем:

а) $N = X$ $M = X$ (жесткое защемление);

б) $\lambda = X$ $\varphi = X$ (свободный конец).

Представим одну из неизвестных в виде линейной зависимости (11)

Тогда любой вектор-столбец начального состояния можно представить в виде (для случая, когда левая опора жесткая заделка)

$$\vec{Y}_0^{лев} = \begin{bmatrix} 0 \\ X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

или в сокращенном виде для любого случая

$$\vec{Y}_0^{лев} = \vec{B}_1^0 X + \vec{B}_2^0. \qquad (9)$$

Векторы $\vec{B}_1^0$, и $\vec{B}_2^0$ являются столбцами матрицы начального состояния $\vec{B}_0$ имеющей размерность (3x2).

Подставляя (9) и (2) в (1), получим для правого конца бруса (вала)

$$\vec{Y}_n^{прав} = P\left[\vec{B}_1^0 X + \vec{B}_2^0\right]. \qquad (10)$$

Неизвестный параметр X определяется из граничного условия на правом конце бруса (вала). Так в случае жесткой заделки на правом конце этим условием является условие равенства нулю перемещения (угла поворота).

$$\lambda_n^{прав}\left(\varphi_n^{прав}\right) = Pb_{11}^0 X + Pb_{12}^0 = 0, \qquad (11)$$

откуда

$$X = -\frac{Pb_{12}^0}{Pb_{11}^0}. \qquad (12)$$

Зная параметр X, мы полностью определяем вектор-столбец начального состояния. Дальнейший расчет бруса или вала осуществля-ется по формуле продолжения (1). По формулам аналогичным (8), (9), (11), (12) производится расчёт при других видах граничных условий.

На основании рассмотренного метода разработан алгоритм и сос-тавлены программы расчёта брусьев и валов с произвольным количест-вом участков при различных условиях опирания (свободный конец, жёсткая заделка, опора с зазором, упругая опора) на обоих концах. В программе так же учитывается и промежуточные упругие опоры, а при расчёте брусьев учитываются и температурная нагрузка. Результаты расчётов представляются в виде таблицы и графиков.

Данные программы могут использоваться студентами при выполнении расчётно графических работ по сопротивлению материалов, а так же при проведении конструкторских расчётов в интерактивном режиме.

Литература

1. Пономарев К.К. Расчёт элементов конструкций с применением ЭЦВМ, М., Машиностроение, 1972.

К РЕШЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Хвисевич В.М.
Брестский политехнический институт

Рассмотрим тело вращения, ограниченное поверхностью S. На S задана осесимметричная функция температуры

где z, r — координаты цилиндрической системы отсчета,
t — время.