

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВУХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГИУ

Введение. В инженерной практике важной задачей является исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) конструктивных элементов машин и механизмов при различных нагружениях. В некоторых случаях достаточно ограничиться решением двумерных задач теории упругости. Однако не всегда можно проводить расчет для тел с произвольной геометрией границы. Существующие вычислительные комплексы (ANSYS, NASTRAN и др.), построенные на базе метода конечных элементов (МКЭ), позволяют исследовать НДС тел с любой геометрией, однако они сложны в использовании и имеют некоторые ограничения, например для бесконечных или полубесконечных тел. Очевидным альтернативным подходом к системе дифференциальных уравнений является попытка свести их к интегральным уравнениям с рассмотрением границы области. Сущность методов граничных интегральных уравнений (ГИУ) состоит в преобразовании дифференциальных уравнений в эквивалентную систему интегральных. Метод ГИУ, основанный на теории потенциала, имеет характерную особенность - возможность решения задачи с использованием дискретизации лишь границы области. Это позволяет снизить на единицу порядок решаемой системы алгебраических уравнений. Естественно, что реализация такой возможности в методе ГИУ предусматривает предварительный переход от исходной краевой задачи для дифференциальных уравнений, описывающих некоторый процесс, к соотношениям, связывающим неизвестные функции на границе области (или ее части).

1. Алгоритм численной реализации краевых задач теории упругости. Рассмотрим плоскую многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_e с внутренними контурами L_i .

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях имеют вид:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i = 0, \quad (1)$$

где λ и μ – параметры Ламе, при граничных условиях:

$$\left[\lambda \theta \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j = F_i(x_L). \quad (2)$$

На основе теории потенциала задача теории упругости (1) сводится к решению сингулярных интегральных уравнений [2] относительно плотности потенциала $v_i(y)$:

$$v_i(P_K) + \frac{1}{2\pi(1-\mu)} \int_L (D + 2\beta_i^2) \cos \alpha \cdot v_i + \left[(\alpha_K \beta_i - \alpha_i \beta_K) D + 2\beta_i \cdot \beta_K \cos \varphi \right] \cdot v_K \frac{dl}{r} = f_i(P_K), \quad i, k = 1, 2; i \neq k$$

где $\cos \varphi = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2$, v_i – плотность потенциала, α_i, β_i – направляющие косинусы, $D = 1 - 2\mu$.

В ранних публикациях [1, 2] для решения (3) граница расчетной области заменялась ломаной линией, состоящей из отрезков прямых, проходящих через характерные точки разбиения границы в пределах постоянной и равной значению плотности в центре рассматриваемого отрезка. При этих предположениях интегралы заменяются конечной суммой по формуле прямоугольников. Интегралы по отрезку, на котором находится параметрическая точка (особые, сингулярные интегралы) полагались равными нулю. После подстановки конечной суммы в интегральное уравнение получается система линейных алгебраических уравнений для определения значений плотностей в центрах отрезков.

Как показали исследования, применение такой методики к решению двумерных краевых задач теории упругости даёт удовлетворительные для практического использования результаты для областей, имеющих достаточно простой контур, который можно заменить ломаной кривой. В других же случаях при реализации задач по такой методике возникали существенные погрешности. Причиной таких погрешностей в данных алгоритмах являлись замена границы области многоугольниками, постоянство плотности в пределах отрезка интегрирования, равенство нулю интегралов по особым отрезкам.

При разработке данного алгоритма использована другая методика. Для замены интеграла конечной суммой границу области (плоскую кривую с кусочно-непрерывной кривизной) разбиваем на отрезки ΔL_i , центры которых P_i . Тогда вместо интегрального уравнения получим систему равенств:

$$v(P_K) + \sum_{i=1}^n \int_{\Delta L_i} v(P) Q(P_K, P) dl = F(P_K). \quad (4)$$

Для получения алгебраической системы линейных уравнений с неизвестными плотностями $v(P_K)$ представим сумму (4) в виде:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Delta L_i} v(P) \cdot Q(P_K, P) dl = \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=0}^{b_m} Q_{ij} A_{ij} - R, \quad (5)$$

где погрешность R замены должна быть как можно меньше при заданном разбиении границы.

При переходе от (4) к (5) использованы допущения:

1. Плотность потенциала $v(P_i)$ в пределах отрезка ΔL_i не постоянна, а выражается в текущей точке отрезка через неизвестные значения в центре этого отрезка и значения в некоторых соседних точках P_i .
2. Количество и расположение этих точек определяется свойствами решения интегральных уравнений, доказанными в [1].

Для эффективного вычисления плотности потенциала в промежуточных точках контура используется интерполяционный полином Лагранжа.

Пусть x – длина дуги контура, которая отсчитывается от центра отрезка интегрирования, x_i – координаты центров отрезков P_i . Проведем полином Лагранжа через $v_i = v(x_i)$, $i=0, 1, 2, \dots, m$:

$$v(x) = \sum_{i=0}^m v(x_i) \frac{\omega_m(x)}{(x-x_i) \omega'_m(x_i)} + \frac{v^{m+1}(\xi)}{(m+1)!} \omega_m(x), \quad (6)$$

где $\omega_m(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_m)$.

Хвисевич Виталий Михайлович, к.т.н., доцент, зав. кафедрой сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.

Веремейчик Андрей Иванович, доцент кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.

Гарбачевский Виталий Владимирович, м.т.н., аспирант кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Здесь важным обстоятельством является то, что $v(x_i)$ входит в интерполяционную формулу линейно. После подстановки $v(x)$ в интеграл по отрезку $\Delta \ell_K$ из-под знака интеграла выносится $v(x_i)$ и оставшуюся часть можно вычислять по какой-либо квадратурной формуле для не особых интегралов (если параметрическая точка не совпадает с центром отрезка интегрирования).

Применение интерполяционного полинома для плотности при замене интеграла конечной суммой приводит к системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $v(x_k)$.

При интерполяции плотности потенциала на промежуточные точки отрезка интегрирования и при возможном увеличении длины отрезков разбиения контура по сравнению с допустимой длиной при применении формул прямоугольников очевидно, что приближение дуги $\Delta \ell_q$ отрезком прямой, проходящей через точки деления контура вносит значительные погрешности в геометрию области.

При решении задач для областей со сложной границей, контур можно задавать аналитически. В качестве 1-го более точного приближения границы, по сравнению с отрезками прямых, можно применять отрезок дуги окружности, проходящей через две соседние точки разбиения и имеющей средний радиус кривизны контура на этом участке. Для широкого класса прикладных задач, в которых область ограничена дугами окружностей и прямыми, такое представление контура является точным. Кроме более точного представления границы, такая методика приводит к устранению погрешностей при вычислении интегралов по особому отрезку (сингулярных интегралов).

Когда параметрическая точка совпадает с центром отрезка интегрирования, сингулярный интеграл по этому отрезку при отмеченных выше предположениях относительно плотности и формы отрезка не будет равен нулю. Как и для неособых интегралов под знаком сингулярного интеграла будет находиться известная функция, но интегрируемая в смысле главного значения Коши [3].

Для вычисления сингулярных интегралов необходимо применение квадратурных формул.

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$J = \int_{-h}^h \frac{f(x)}{x} dx, \quad (7)$$

к которому приводится с учётом свойств ядер интегральных уравнений задача теории упругости (1).

В простейшем случае, если провести интерполяционный полином 2-й степени через значения $f(x)$ в центре и по краям отрезка интерполирования, получим:

$$f(x) = f(0) + \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \cdot x + Ax^2 + R,$$

где $R = \frac{f''(\xi)}{6} x(x^2 - h^2)$; $-h \leq \xi \leq h$.

После подстановки в (7) получаем:

$$J = f(h) - f(-h) + \int_{-h}^h \frac{f''(-\xi)}{6} (x^2 - h^2) dx,$$

так как $(x^2 - h^2)$ сохраняет свой знак в пределах $-h \leq x \leq h$, то:

$$\begin{aligned} J &= f(h) - f(-h) + \frac{f''(\xi_1)}{6} \int_{-h}^h (x^2 - h^2) dx = \\ &= f(h) - f(-h) - \frac{2}{9} h^3 f''(\xi_1). \end{aligned} \quad (8)$$

Оценку формулы (8) можно улучшить с помощью интерполяционного полинома, который проводим через точки $-a, 0, a$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f(a) - f(-a)}{2a} x + Ax^2 + \frac{f''(\xi)}{6} x(x^2 - a). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получаем:

$$J = \frac{h}{a} (f(a) - f(-a)) + \frac{f''(0)}{6} \cdot 2h \left(\frac{h^2}{3} - a^2 \right) + O(h)^4. \quad (10)$$

Полагая $x^2 = \frac{h^2}{3}$, имеем:

$$J = \sqrt{3} (f(a) - f(-a)) + R_1, \quad (11)$$

где R_1 содержит h в более высокой степени, чем в формуле (9).

В работе [4] показано, что применяя для $f(x)$ интерполяционный полином степени выше второй, можно получить квадратурную формулу для сингулярного интеграла при одинаковом количестве точек более точную и экономичную, чем формулы (10).

В этой же работе предлагается для решения интегрального уравнения задачи Неймана использовать квадратурную формулу Гаусса для вычисления сингулярных интегралов.

Если разыскивать величину J из (7) в виде

$$J = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x} dx = \sum_{i=1}^n v_i f(x_i) + R, \quad (12)$$

где v_i коэффициенты и координаты узлов x_i подлежат определению из условия, чтобы остаток R был равен нулю для полиномов $f(x)$ наибольшей возможной степени, то можно показать, что (12) будет точкой для полиномов степени $2n$ при n чётном.

Формулу (12) запишем так:

$$J = \int_{-h}^h \frac{f(x)}{x} dx = h \sum v_k f(x_k) + R. \quad (13)$$

Эта квадратурная формула с остаточным числом R обладает не только высокой точностью по сравнению с формулой типа (8), но и тем преимуществом, что позволяет вычислить как не особые, так и сингулярные интегралы.

Так, заменив в (13) v_k на его значение $\frac{\omega_k}{x_k}$, где ω_k - веса

квадратурной формулы Гаусса, получим:

$$J = \int_{-h}^h \frac{f(x)}{x} dx = h \sum_{k=1}^n \omega_k \frac{f(x_k)}{x_k} + R_c, \quad (14)$$

т.е. квадратурная формула для сингулярного интеграла при чётном n отличается от формулы Гаусса только остаточным членом.

Таким образом, можно заключить, что полное решение плоской краевой задачи теории упругости методом потенциала делится на три этапа:

1. Замена интегральных уравнений системой алгебраических уравнений;

2. Вычисление по полученным значениям плотности потенциала;

3. Вычисление по полученным значениям плотности в центрах отрезков разбиения контура области напряжений и перемещений в граничных и внутренних точках.

Первый и третий этапы осуществляются с помощью формул (6) и (13).

Третий этап менее трудоёмкий, чем первый, но оба они основаны на вычислении контурного интеграла

$$S(P_k) = \sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} v(P) Q(P_k, P) dl. \quad (15)$$

Для вычисления интегралов под знаком суммы применим формулу (13) к функции $v(P) \cdot Q(P_k, P_{ij})$:

$$J_i = \int_{\Delta_i} v(P) Q dl = h_i \sum_{j=1}^m \omega_j v(x_j) Q(P_k, P_{ij}) + R_i. \quad (16)$$

В этом случае различий между особыми и не особыми отрезками нет в силу свойств формулы (13).

Точка P_{ij} лежит внутри i -го отрезка, значения $Q(P_K, P_{ij})$ известны и для вычисления $v(x_i)$ применим формулу (6), представив её в виде:

$$v(x_j) = \sum_{t=0}^P v(x_t) A(x_t, x_j) + \omega_P(x_j) \frac{v^{(P+1)}(\xi_j)}{(P+1)!}, \quad (17)$$

где x_t – координаты точек, через которые проводится интерполяционный полином, $v(x_t) = v^t$ – значение плотностей в этих точках

$$A(x_t, x_j) = A_j^t \frac{\omega_P(x_j)}{(x_j - x_t) \omega'_P(x_t)}. \quad (18)$$

Подставив (15) в (16), получаем варианты формулы для вычисления интеграла по отрезку ΔI_j

$$J_i = h_i \sum_{t=0}^P v^t \sum_{j=1}^m \omega_j A_j^t Q_j + R_i^1 + R_i^2; \quad (19)$$

$$J_i = h_i \sum_{j=1}^m \omega_j Q_j \sum_{t=0}^P v^t A_j^t Q_j + R_i^1 + R_i^2, \quad (20)$$

где $R_i^j = h_i \sum_{j=1}^m \omega_j Q_j \omega_P(x_j) \frac{v^{(P+1)}(\xi_j)}{(P+1)!}$.

Формула (19) используется на первом этапе решения задач. Формула (20) используется на третьем этапе вычислений, когда значения v^t известны. Здесь предварительно определяются $\sum_{t=0}^P v^t A_j^t$, т.е. значения плотностей в узловых точках x_j , после чего осуществляется суммирование по j .

2. FORTRAN – программа численной реализации. На основе разработанного алгоритма численного решения интегральных уравнений краевых задач методом ГИУ [4] разработана программа на алгоритмическом языке «FORTRAN», которая предназначена для расчёта конструктивных элементов, находящихся в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации. Область, занятая телом, может быть односвязной или многосвязной.

По разработанной программе можно решать как внутренние, так и внешние краевые задачи теории упругости и термоупругости. Для внешней задачи задаётся напряжение в бесконечно удалённой точке. При разработке программы учитывалась геометрическая и физическая симметрия (рассматриваемая область и нагрузка). Учёт осевой симметрии расширяет возможности программы, облегчает ввод исходной информации.

В соответствии с алгоритмом, процесс реализации задачи делится на три этапа. На первом этапе осуществляется ввод и обработка исходных данных. Результатом обработки являются координаты центров отрезков разбиения границы области, их длины, радиусы кривизны и координаты вектора внешней нормали. На этом этапе формируется также массив внешней нагрузки и задание характеристик материала. На втором этапе составляется и решается СЛАУ, результатом которой являются значения плотностей потенциала в точках границы области. Алгебраическая система решается методом последовательных исключений Гаусса. При формировании строк матрицы в зависимости от расстояния между параметрической точкой и отрезком интегрирования автоматически определяется число узлов точек квадратурной формулы Гаусса. На 3-ем этапе вычисляются напряжения и перемещения на границе области в соответствующих внутренних точках области по формулам [4, 5].

При построении расчётной области следует стремиться получать границу с кусочно-непрерывной, ограниченной кривизной. Если по каким-либо причинам трудно привести задачу к гладкой

границе, в программе предусматривается возможность реализации области с выступающими и входящими углами.

В стандартном режиме программа реализует задачи для областей, ограниченных отрезками прямых и окружностей. Рассматриваемая область может быть произвольной, заданной графически или аналитически. В связи с этим, изменения вносятся в подпрограмму ввода исходных данных и содержат подпрограммы или набор операторов по вычислению координат центров отрезков разбиения границы, радиусов кривизны, длин отрезков, векторов внешней нагрузки только для тех участков, которые нельзя заменить окружностью или прямой. В программе также предусмотрена диагностика ввода и обработки исходных данных.

С помощью разработанной программы решены ряд тестовых задач по исследованию НДС при механическом и температурном нагружении. Для большей наглядности результаты расчетов обрабатываются с помощью программы для визуализации «TecPlot 360».

3. Напряжённо-деформированное состояние пробивного пуансона. Данная деталь используется для пробивки отверстий. Материал пуансона – сталь X12M. Многосвязная область, представляющая собой продольное сечение, нагружена распределённой на пробивном конце равномерной контурной нагрузкой $100 \cdot 10^6$ Н/м. Область имеет только внешний контур, а так же плоскость симметрии, проходящую через ось Y. Напряжения на закрепляемом конце можно представить как равномерную контурную нагрузку, численно равную 41,6 Н/мм. Учитывая свойства симметрии, построим расчётную схему для реализации этой задачи (рисунок 1).

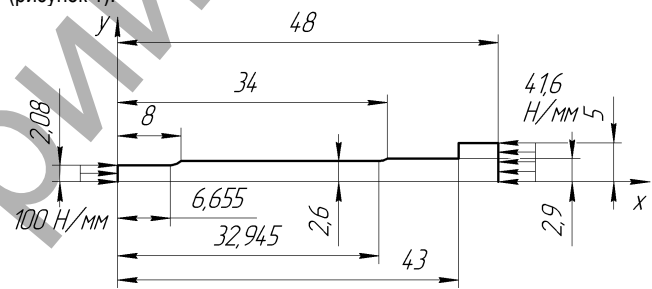


Рис. 1. Расчётная схема пуансона

Расчётная кусочно-гладкая область имеет 9 непрерывных участков, являющихся отрезками прямых и дугами окружностей. Каждый участок в порядке нумерации разбит соответственно на 15; 16; 15; 32; 10; 55; 10; 32; 15 участков.

В результате реализации задачи получено напряженное состояние в соответствующих точках области (рисунок 2).

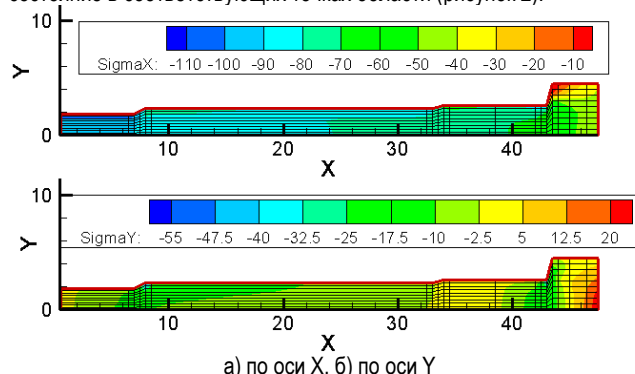


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений в продольном сечении

Решение этой задачи численно реализовано с помощью вычислительного комплекса «ANSYS» [5]. Количественная оценка напряжений показала, что результаты решений задач обоими способами отличаются в допустимых пределах при проведении инженерных расчётов.

Заключение. Усовершенствованы алгоритм и FORTRAN – программа для численного решения двумерных задач теории упругости с использованием метода ГИУ. Проведена его численная реализация. В результате сравнения возможностей метода ГИУ и МКЭ при решении задач механики деформированного твердого тела следует заметить, что применение разработанной FORTRAN – программы существенно упрощает подготовку исходной информации, расширяет класс решаемых задач, следовательно, её можно эффективно использовать для оценки НДС конструктивных элементов при воздействии механических нагрузок.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Горгидзе, А.Я. О численном решении интегральных уравнений плоской задачи теории упругости / А.Я. Горгидзе, А.К. Рухадзе // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1940. – Т. 1. – С. 255–258.

2. Корнейчук, А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. – М.: Наука, 1964. – С. 64–74.
 3. Купрадзе, В.Д. Методы потенциала в теории упругости. – М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.
 4. Хвисевич, В.М. Интегральные уравнения и алгоритм решения плоской краевой задачи стационарной термоупругости методом потенциала // Строительная механика и расчет сооружений – 1991. – № 2. – С. 48–51.
 5. Гарбачевский, В.В. Численное решение двумерных задач механики деформируемого твердого тела методом потенциала: дис... магистр. тех. наук: 05.13.18 / В.В. Гарбачевский. – Брест, 2012. – 62 с.

Материал поступил в редакцию 07.02.14

HVISEVICH V.M., VEREMEYCHIK A.I. GARBACHEVSKIY V.V. Numerical realization of the integrated equations of two-dimensional tasks of the theory of elasticity by the BIE method

In article procedure of numerical realization of two-dimensional regional tasks of the theory of elasticity by means of a method of the boundary integrated equations is considered. The algorithm of the numerical solution of tasks of the theory of elasticity with use of this method is developed. Numerical realization in algorithmic language of "FORTRAN" is carried out it. The solution of a test example showed reliability of the developed algorithm.

УДК 537.527

Сазонов М.И., Веремейчик А.И.

ВЛИЯНИЕ ВДУВА ГАЗА НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ТЕПЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АНОДА ТУРБУЛЕНТНОЙ ДУГИ

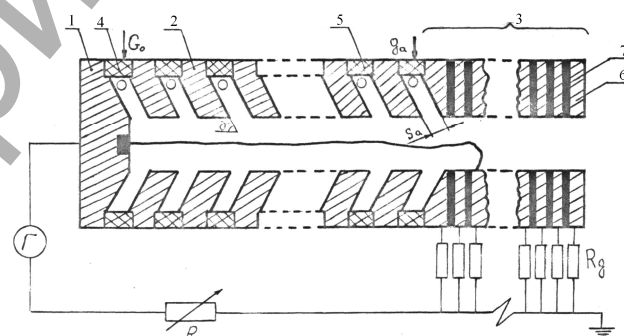
Введение. Для разработки и конструирования мощных высокоэнthalпийных плазмотронов, создания методики их расчета, достижения высокого ресурса их работы, что требуется для многих плазменных технологических процессов, проведены исследования распределения тока и тепловых потерь вдоль выходного электрода. Результаты этих исследований позволяют оптимизировать параметры и достичь минимальных тепловых потерь в выходном электроде. Электрические и тепловые характеристики выходного электрода изучены лишь для плазмотронов с самоустанавливающейся длиной дуги и плазмотронов со ступенчатым выходным электродом [1-8]. В данной работе проведены исследования таких характеристик для плазмотронов с межэлектродной вставкой (МЭВ). Отличие поведения дуги в выходном электроде плазмотрона с МЭВ заключается в том, что течение газа в области анода является турбулентным. В этих условиях следует ожидать изменения характера шунтирования и расщепления дуги в выходном электроде и распределения тока вдоль анода, особенно для случая, когда течение газа перед ним является развитым турбулентным.

1. Методика исследований. Исследования распределения плотностей тока и теплового потока вдоль анода проводились на воздухе в плазмотроне, схема которого приведена на рисунке 1.

Цилиндрическая электродуговая камера плазмотрона образована торцевым электродом 1, секциями МЭВ 2, электрически и термически изолированными друг от друга и от электродов, и цилиндрическим выходным электродом-анодом 3. Внутренний диаметр электродуговой камеры $d = 2$ см.

Анод состоит из набора медных индивидуально охлаждаемых водой цилиндрических секций (шайб) 6 толщиной 0,4 см с внутренним диаметром 2 см, изолированных друг от друга асбестовыми прокладками 7 толщиной 0,3 мм. В аноде использовалось 12 секций. Секции электрически и термически изолированы друг от друга и соединены с положительным полюсом источника электропитания через низкоомные сопротивления – шунты и балластный реостат. Распределение тока вдоль анода

определялось путем измерения падения потенциала на шунтах.



1 – катод, 2 – секции МЭВ, 3 – анод, 4 – первое кольцо закрутки, 5 – межсекционное кольцо закрутки, 6 – шайба, 7 – изолятор, Г – источник электропитания, R – балластное сопротивление, R_ш – добавочное сопротивление

Рис. 1. Схема плазмотрона и электропитания

Индивидуальный подвод воды к секциям МЭВ и шайбам анода позволил проводить калориметрирование тепловых потерь в них и тем самым определять среднюю энthalпию торможения потока газа перед анодом и плотность тепловых потоков вдоль него. Разность температур охлаждающей воды измерялась дифференциальным транзисторным термодатчиком. Кроме того, проводились измерения интегральных тепловых потерь в сплошные аноды длиной 2, 3, 6 калибров в плазмотронах с внутренним диаметром $d = (10; 20; 30) \cdot 10^{-3}$ м.

Рабочий газ с расходом G_0 подавался в дуговой канал через кольцо закрутки 4, расположенное между катодом и первой секцией вставки, а также через межсекционные кольца закрутки и каждую щель между секциями с расходом воздуха G_i . Между анодом и

Сазонов Михаил Иванович, д.т.н., профессор кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.