РЕШЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Тузик Т. А.

Рассматривается сингулярное интегральное уравнение вида

$$u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(x-s)}{x-s}+b(x)\frac{\cos(x-s)}{x-s}\right)u(s)ds=g(x),-\infty\langle x\langle\infty \quad (1)$$

где b(x) и g(x) - комплекснозначные функции, b(x) непрерывна при $x\in(-\infty,\infty)$, а $g(x)\in L_2(-\infty,\infty)$. Решение u(x) ищем в $L_2(-\infty,\infty)$.

Вводится новая неизвестная функция

$$u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x-s)}{x-s}u(s)ds=\Psi(x). \quad (2)$$

Используя соответствующие формулы [1,2], уравнение (1) сводим к характеристическому сингулярному интегральному уравнению относительно функции $\psi(x)$

$$\Psi(x)+\frac{b(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(x)}{\tau-x}d\tau=g(x), \quad -\infty< x <\infty. \quad (3)$$

Решение такого уравнения известно [3,4], оно зависит от индекса соответствующей краевой задачи Римана

$$\chi=\frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{1-ib(x)}{1+ib(x)}\right\}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}, \quad 1+b^2(x)\neq 0, \quad -\infty< x <\infty.$$

Если уравнение (3) разрешимо, то ищем решение уравнения (2) ([4], стр. 87, пример 3, при $\lambda=-1/\pi$)

Отметим, что при $\chi\geq 0$ уравнение (1) разрешимо при любой правой части. В случае $\chi<0$ для его разрешимости необходимы и достаточны $|\chi|$ условий. Во всех случаях общее решение уравнения (1) можно записать в квадратурах.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., 1967 .

2. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1974 .

3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977 .

4. Гахов Ф. Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М., 1978 .