

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по дисциплине

«Численные методы решения задач»

Методические указания

для студентов специальностей

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и

1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий»

дневной и заочной форм обучения

Брест 2019

УДК 518:624.04(075)

ББК 38.112

И 26

Рецензент: директор ОДО «Брестская инженерная группа»,
канд. техн. наук, доцент Образцов Олег Леонидович

Игнатюк В.И., Бочарова Н.В.

И 26 Лабораторные работы по дисциплине «Численные методы решения задач» : методические указания для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий» дневной и заочной форм обучения. – Брест : Изд-во БрГТУ, 2019. – 67 с.

В методических указаниях представлены лабораторные работы, в которых рассматриваются основы решения численными методами задач расчета строительных конструкций и сооружений с использованием системы компьютерной алгебры MathCAD, включая расчеты с использованием общей системы уравнений равновесия, численного интегрирования, матричной формы определения перемещений. Приведено решение задач численными методами, выполнена верификация результатов с использованием компьютерных программ, разработанных на кафедре ПМ, и программных комплексов Лира и SCAD.

Методические указания предназначены для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий».

УДК 518:624.04(075)

ББК 38.112

© В.И. Игнатюк, 2019

© Н.В. Бочарова, 2019

© Издательство БрГТУ, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Численные методы – это методы приближенного решения математических задач, позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа более простых алгебраических и арифметических действий, выполняемых как вручную, так и с помощью компьютерной техники.

В процессе выполнения лабораторных работ по дисциплине «Численные методы решения задач» формируются следующие компетенции (компетенция – приобретаемые в процессе обучения и воспитания способности осуществлять деятельность в соответствии с полученным образованием):

- способность к самоорганизации и самообразованию;
- способность применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического исследования;
- владение компьютером как средством для решения поставленных задач, используя и совершенствуя все свои знания в офисных и CAD-программах для хранения, обработки и управления информацией;
- владение методами проектирования элементов конструкций и методами математического (компьютерного) моделирования с использованием программно-вычислительных комплексов (ПК)

В методических указаниях рассматривается применение численных методов к задачам расчета сооружений с использованием методов расчета, которые изучаются в строительной механике, а также проверка в ПК.

Для реализации процедур численных методов при решении задач строительства предлагается применять широко распространенный и современный компьютерный пакет прикладной математики MathCAD.

Решение любой практической задачи начинается с математической постановки задачи, включая описание исходных данных, условий и целей на языке математических понятий. Соответственно строится математическая модель.

Математическая модель может иметь вид уравнения, системы уравнений либо быть выраженной в форме математических структур или соотношений. Математические модели могут быть непрерывными или дискретными. После моделирования производится решение математической задачи и исследование математической модели. Процесс исследования свойств объекта по его модели называется моделированием. После решения задач численными методами, которые являются приближенными методами, производится сопоставление результатов в некоторых ПК.

При решении поставленной инженерной задачи, используя любой программный комплекс нужно не забывать, что это инструмент, упрощающий сложные расчеты, а составление расчетной модели должно базироваться на методах расчета строительной механики.

Методические указания разработаны для студентов, чтобы они применяли численные методы в расчетах сооружений, а также могли проверить результат в ПК или в MathCAD.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСАХ

1.1. Общие сведения о ПК Лира и SCAD

ПК Лира [1, 2, 3] и SCAD [4, 5] предназначен для расчета конструкций на прочность жесткость устойчивость при статическом или динамическом нагружении. В основу расчета положен метод конечных элементов (МКЭ). С помощью МКЭ рассчитываются плоские и пространственные стержневые системы, пластины и оболочки, мембраны, массивные тела. Также могут быть рассчитаны комбинированные системы: рамно-связевые конструкции многоэтажных зданий, плиты на упругом основании и т.д.

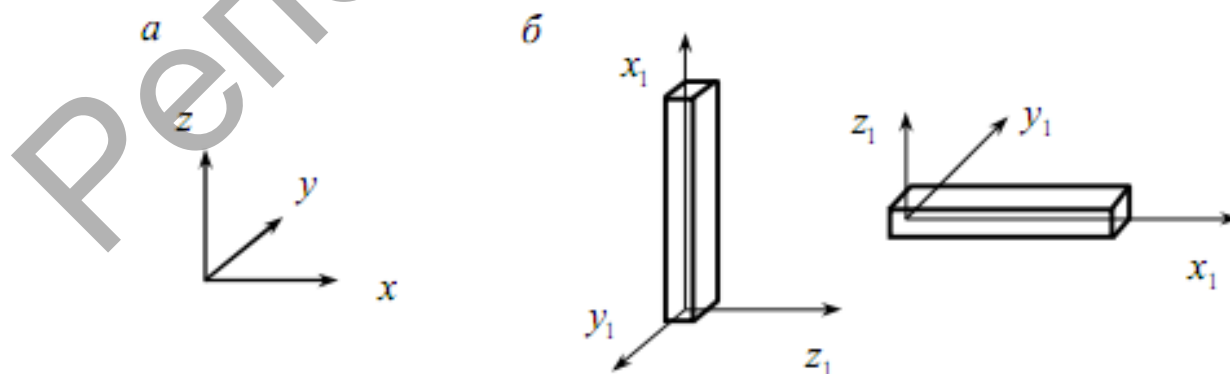
Статические воздействия могут быть силовыми, температурными или заданными перемещениями отдельных точек конструкций. Динамическое нагружение задается в виде вибрационной нагрузки от технологического оборудования, пульсации ветра, ударных и сейсмических воздействий.

Рассчитываемые системы могут иметь произвольные очертания и условия закрепления. Библиотека компонентов содержит большое количество различных конечных элементов (КЭ). В ПК Лира и SCAD решаются различные задачи, по результатам расчета осуществляется выбор невыгодных комбинаций нагрузок, проверка или подбор размеров поперечных сечений, диаметров арматуры.

1.1.1. Подготовка исходных данных ПК Лира и SCAD

Исходные данные задаются в режиме диалога при помощи графического препроцессора. Для подготовки исходных данных рассчитываемую задачу необходимо разбить на узлы и конечные элементы. Элементы, имеющие одинаковые жесткостные характеристики, объединяются в один тип жесткости.

Расчетная схема вводится в правой декартовой системе координат x, y, z (рис. 1.1, а), для КЭ большое значение имеет местная (локальная) система координат. Для стержневых КЭ местная система координат x_1, y_1, z_1 принимается таким образом, чтобы ось x_1 проходила вдоль оси стержня, а остальные оси направляются в соответствии с правой системой координат по направлениям, обычно совпадающим с центральными осями сечений (рис. 1.1, б).



а) – общая система координат; б) – местная система координат

Рисунок 1.1 – Системы координат для стержневого КЭ

Координаты узлов при вводе данных для любой системы задаются в общей пространственной системе координат, в соответствии которой любой узел имеет шесть степеней свободы, которые нумеруются следующим образом:

- 1 – линейное перемещение вдоль оси x ;
- 2 – линейное перемещение вдоль оси y ;
- 3 – линейное перемещение вдоль оси z ;
- 4 – поворот вокруг оси x ;
- 5 – поворот вокруг оси y ;
- 6 – поворот вокруг оси z .

Шарниры используются для описания прикрепления стержней к узлам в виде устранения линейных или угловых связей по осям местной системы координат.

Для стержневых КЭ указываются:

- EA – жесткость на растяжение-сжатие (кН);
- EJ_y – жесткость на изгиб относительно оси y_1 (кН·м²);
- EJ_z – жесткость на изгиб относительно оси z_1 (кН·м²);
- GJ_k – жесткость на кручение (кН·м²);
- GA_y – жесткость на сдвиг вдоль оси y_1 (кН);
- GA_z – жесткость на сдвиг вдоль оси z_1 (кН).

Для стальных конструкций поперечное сечение может быть назначено с использованием базы данных из сортамента прокатных профилей.

Связи накладываются в общей системе координат и имеют следующие обозначения:

- X – линейная связь вдоль оси x ;
- Y – линейная связь вдоль оси y ;
- Z – линейная связь вдоль оси z ;
- U_x – связь от поворота вокруг оси x ;
- U_y – связь от поворота вокруг оси y ;
- U_z – связь от поворота вокруг оси z .

Нагрузки в виде сосредоточенных сил и моментов прикладываются в узлы по направлениям общей системы координат. Распределенные нагрузки прикладываются к элементам и задаются по направлениям местной или общей системы координат. Нагрузки могут прикладываться по различным вариантам загрузений. Положительные моменты направлены по часовой стрелке, если смотреть с конца соответствующей оси.

1.1.2. Признак схемы ПК Лира и SCAD

Признак схемы позволяет существенно упрощать ввод данных, например, для плоской рамы (балки) нет необходимости ставить опорные связи из плоскости; для фермы не нужно устанавливать шарниры по концам КЭ и т.п. Наиболее часто используемые признаки схемы приведены в табл. 1.1. Пользователь должен понимать при выборе признака схемы, какую систему рассчитывает (плоскую или пространственную, ферму, раму или балочный ростверк) и знать, что представляют собой узлы (жесткие или шарнирные) и как стержни прикреп-

плены к узлам – это все нужно продумать, чтобы правильно задать расчетную модель задачи и проанализировать полученные результаты, используя программный комплекс, как инструмент для решения поставленной инженерной задачи.

Таблица 1.1 – Признаки схемы для различных типов задач

Признак схемы	Плоскость	Количество степеней свободы	Линейные перемещения			Угловые перемещения			Рассчитываемая система
			1	2	3	4	5	6	
1	xOz	2	+	-	+	-	-	-	Плоская ферма, панель
2	xOz	3	+	-	+	-	+	-	Плоская рама, балка, арка
3	xOy	3	-	-	+	+	+	-	Балочный ригель, плита
4	-	3	+	+	+	-	-	-	Пространственная ферма, массивное тело
5	-	6	+	+	+	+	+	+	Система общего вида

1.1.3 Последовательность решения задачи в ПК Лири и SCAD

1. Создать новый проект (задачу).
2. Подготовить расчетную схему:
 - ввести координаты узлов;
 - задать элементы;
 - описать жесткости и назначить их КЭ;
 - установить опорные связи;
 - задать нагрузки.
3. Проверить корректность ввода исходных данных:
 - визуальная проверка расчетной схемы;
 - заданных типов жесткости и назначения их КЭ;
 - правильность расстановки опорных связей, шарниров;
 - корректность стыков в узлах схемы КЭ различных типов;
 - правильность задания нагрузок и т.д.
4. Провести расчет задачи.
5. Вывести результаты расчета (эпюры усилий, деформированную схему, поля напряжений).
6. Проанализировать полученные результаты. Сопоставить результаты расчета с предполагаемыми.
7. При необходимости провести серию дополнительных расчетов:
 - по различным моделям;
 - с различным числом и типами КЭ;
 - с учетом сгущения сетки КЭ в местах резкого изменения напряжений.

1.2. Общие сведения о программе Sirius

Программа Sirius разработана в БрГТУ на кафедре строительной механики студентом группы КП-5 Гойшиком И.М под руководством к.т.н., доцента Игнатьюка В.И. Sirius позволяет рассчитывать плоские стержневые системы – рамы, балки, фермы – с жестким либо шарнирным соединением в узлах на действие статических внешних нагрузок: сосредоточенных сил и моментов, равномерно распределенных нагрузок.

Ввод исходных данных в программе может осуществляться в двух вариантах в табличном или в графическом. В программе предусмотрен также ряд проверок ввода исходных данных на их корректность, включая проверки на геометрическую неизменяемость расчетной модели. Результаты расчета представляются как в численном виде – в таблицах перемещений и усилий, так и в графическом виде – в виде эпюр усилий M , Q , N .

Программа обладает удобным интерфейсом, высокая наглядность представления исходных данных и результатов расчета. Программа ориентирована на использование в учебном процессе на первоначальном этапе ознакомления студентов со строительной механикой, поэтому программа Sirius широко распространена в студенческой среде и за пределами БрГТУ.

1.3. Общие сведения о программе SdCAD

Программа SdCAD разработана в БрГТУ Костюк О.В (расчетный модуль), а интерфейс Бочаровой Н.В. под руководством к.т.н., профессора кафедры СК Уласевича В.П.

Характерная особенность расчета стержневых систем – необходимость при расчете учитывать ее деформированную схему равновесия, поэтому при расчете рассматривается не постоянная расчетную схему как расчетную модель, а n деформированных схем равновесия, определенных n возможными комбинациями действующих на систему нагрузок или других силовых воздействий. Одну из них необходимо принять за исходное состояние, тогда все оставшиеся $n-1$ и принято считать за рассчитываемые.

Численно-аналитический метод расчета позволяет рассчитывать по деформированному состоянию сложные многоэлементные конструктивные схемы, рассматривая их с позиции общего класса задач – нелинейно деформируемых комбинированных балочно-вантовых систем произвольной геометрической структуры. Универсальность и высокая точность метода расчета по деформированному состоянию обусловлена следующими его составляющими: нелинейной системой разрешающих уравнений в матричной форме, построенной на принципах МКЭ в форме перемещений, универсальным конечным элементом «Гибкий стержень», позволяющим получить в матричной форме нелинейную систему разрешающих уравнений, способную моделировать работу всех возможных

прямолинейных стержней рассчитываемой системы с учетом деформированного состояния.

При выводе результатов на эпорах в SdCAD две эпоры – для деформационного и линейного расчета, результаты близки между собой, но если система имеет повышенную деформативность, то сразу можно увидеть, что эпоры усилий отличаются, и для подбора сечений будем брать более точные значения усилий, вычисленные для деформационного расчета.

1.4. Общие сведения о программе Arka2, Arka3

Программа Arka2, Arka3 разработана в БрГТУ на кафедре строительной механики студентом группы КП-14 Игнатовым А.Ю под руководством к.т.н., доцента Игнатюка В.И.

Программа Arka2 и Arka3 являются учебными программами и для выполнения расчета арки в них необходимо предварительно вычислить вручную усилия в двух контрольных сечениях арки, значения которых вводятся в программу и проверяются ею. Программа выполнит расчет арки только после того, как значения усилий в контрольных сечениях будут рассчитаны верно.

В программе Arka2 предусмотрен расчет двухшарнирных арок с разным законом изменения оси криволинейного стержня (круговая, параболическая, синусоидальная, эллиптическая, гипербоидальная, катеноидальная, стрельчатая) и изменения размеров поперечного сечения вдоль оси, которые назначаются при проектировании. Двухшарнирная арка представляет собой статически неопределимую систему с одной лишней связью, расчет выполняется методом сил с использованием численного интегрирования.

В программе Arka3 предусмотрен расчет симметричных трехшарнирных арок на неподвижные вертикальные и горизонтальные сосредоточенные и распределенные (в том числе трапецеидальные) нагрузки. Трехшарнирные арки статически определимы и относятся к распорным системам, в которых при действии только вертикальных нагрузок возникают и горизонтальные опорные реакции, называемые распором.

Результаты расчета арки представляются в графическом и в табличном видах – показываются эпоры внутренних усилий M , Q и N в арке, ее деформированный вид и усилия во всех сечениях, включая характерные. Результаты расчета арки вместе с исходными данными могут быть выведены на печать. Внутренние силы и перемещения при необходимости могут быть вычислены для любого заданного сечения, что осуществляется вызовом соответствующих процедур.

Программа Arka2 и Arka3 имеют удобный интерфейс, графическое и табличное представление исходных данных и результатов расчета, может быть использована и для проектирования, так как результаты расчета имеют высокую точность, так как получены аналитическим способом.

2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм

Цель работы: изучить применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм.

Порядок выполнения работы:

- 1) обозначить приложенную к ферме нагрузку и реакции в опорах;
- 2) пронумеровать стержни фермы;
- 3) вырезая каждый узел фермы, составить общую систему равновесия;
- 4) решить систему уравнений в системе компьютерной алгебры MathCAD;
- 5) сделать проверку, используя три уравнения равновесия фермы в целом.

Пример расчета. Рассмотрим расчет фермы, представленной на рис. 1.1.

Будем считать, что нагрузка может быть приложена только в узлы верхнего пояса фермы, поэтому обозначим внешнюю нагрузку в виде сосредоточенных сил (P_1, P_2, P_3, P_4). Для удобства пронумеруем стержни фермы (1–13). Обозначим реакции в опорах (R_A, R_B, H_B).

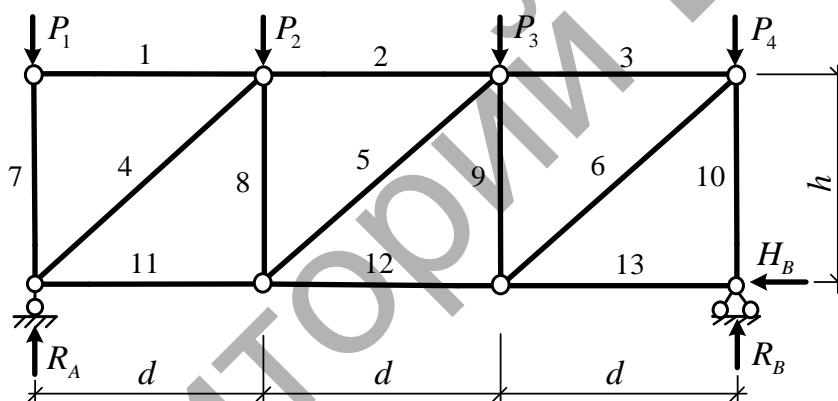


Рисунок 2.1

Вырезая каждый узел фермы, обозначим неизвестные продольные усилия стержней фермы (N_1, N_2, N_3, \dots и т.д., рис. 1.2).

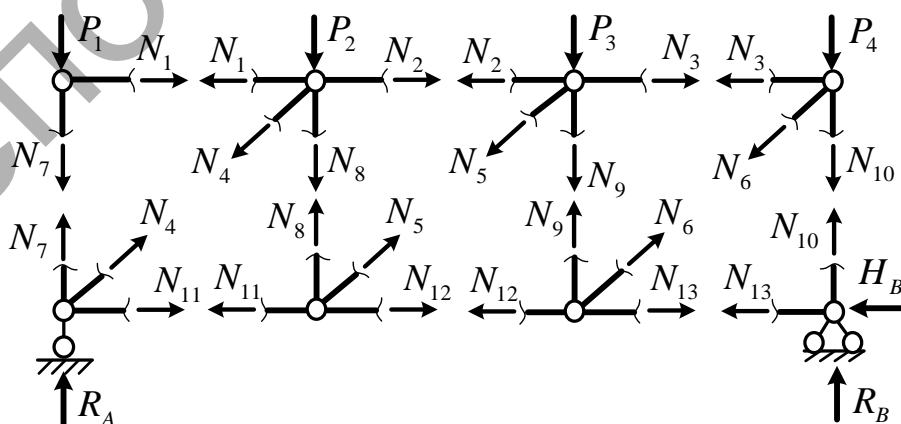
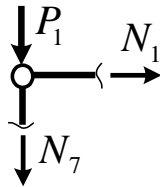
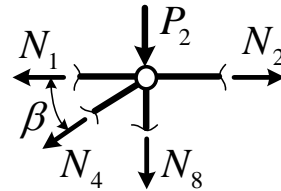


Рисунок 2.2

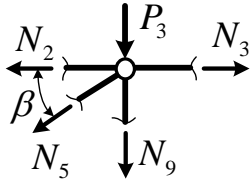
Составим уравнения равновесия для каждого узла фермы ($\sum X = 0; \sum Y = 0$) проецируя усилия и нагрузки на соответствующие оси.



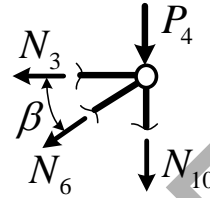
$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad N_1 = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad -P_1 - N_7 = 0; \end{aligned}$$



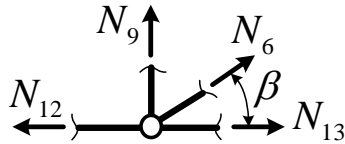
$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad -N_1 - N_4 \cdot \cos \beta + N_2 = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad -P_2 - N_4 \cdot \sin \beta - N_8 = 0; \end{aligned}$$



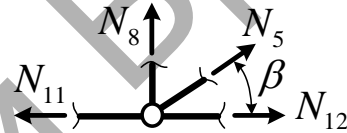
$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad -N_2 - N_5 \cdot \cos \beta + N_3 = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad -P_3 - N_5 \cdot \sin \beta - N_9 = 0; \end{aligned}$$



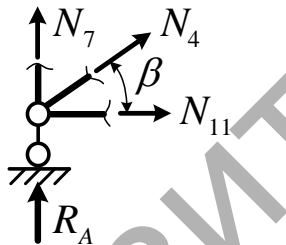
$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad -N_3 - N_6 \cdot \cos \beta = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad -P_4 - N_6 \cdot \sin \beta - N_{10} = 0; \end{aligned}$$



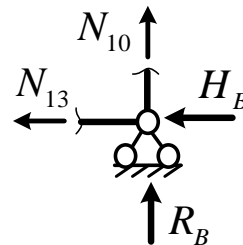
$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad -N_{12} + N_6 \cdot \cos \beta + N_{13} = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad N_9 + N_6 \cdot \sin \beta = 0; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad -N_{11} + N_5 \cdot \cos \beta + N_{12} = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad N_8 + N_5 \cdot \sin \beta = 0; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad N_4 \cdot \cos \beta + N_{11} = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad R_A + N_4 \cdot \sin \beta + N_7 = 0; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad -N_{13} - H_B = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad N_{10} + R_B = 0; \end{aligned}$$

Для определения усилий N_1, N_2, N_3, \dots и реакций, решим систему уравнений, составленную из уравнений равновесия узлов фермы, представленных в таблице. По результатам расчета следует выполнить проверку опорных реакций:

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 3d - P_1 \cdot 3d - P_2 \cdot 2d - P_3 \cdot d = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B \cdot 3d + P_2 \cdot d + P_3 \cdot 2d + P_4 \cdot 3d = 0;$$

$$\sum X = 0; \quad H_B = 0.$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD, верификация результатов в ПК см. ПРИЛОЖЕНИЕ А.

Репозиторий БРГТУ

3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок

Цель работы: изучить применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок и решение систем линейных алгебраических уравнений.

Порядок выполнения работы:

1) разделить балку по шарнирам на простые балки (получим в качестве неизвестных в шарнирах внутренние силы и опорные реакции), показав усилия взаимодействия между ними;

2) получить общую систему уравнений равновесия рамы, составив уравнения равновесия для каждой простой балки;

3) определить усилия в простых балках и опорные реакции, решив полученную систему линейных алгебраических уравнений в системе компьютерной алгебры MathCAD;

4) построить эпюры усилий M , Q , N для каждой балки в отдельности и для всей многопролетной балки;

5) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр усилий и статическую проверку.

Пример расчета.

Рассмотрим расчет многопролетной балки, показанной на рисунке 3.1

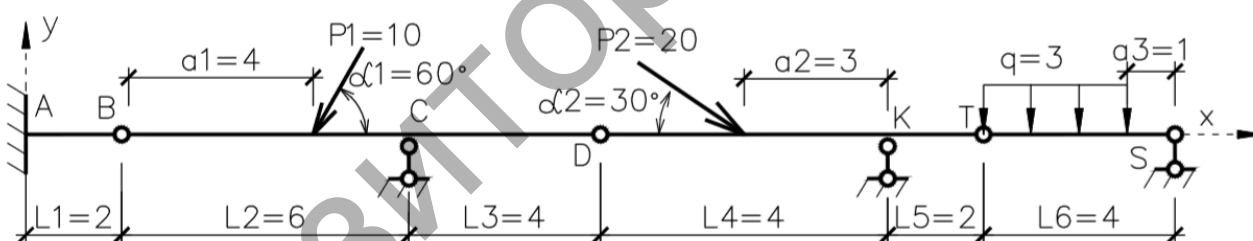


Рисунок 3.1

Каждая из простых балок – это диск, который имеет три степени свободы, равновесие которого описывается тремя уравнениями равновесия. Каждый шарнир, соединяющий балки, имеет две связи и при его разрезании в нем возникает соответственно две внутренние реактивные силы. Рассматриваемая многопролетная балка состоит из четырех простых балок, и для них соответственно можно составить двенадцать уравнений равновесия. Разделив многопролетную балку по трем шарнирам B, D, T на простые балки, получим в качестве неизвестных шесть внутренних реактивных сил и шесть опорных реакций в опорах.

Разобьем балку на простые балки. Обозначим реакции опор R_A , H_A , M_{RA} , R_C , R_K , R_S и неизвестные в шарнирах X_B , Y_B , X_D , Y_D , X_T , Y_T . (рис. 3.2).

Используя общий подход, следует составить уравнения равновесия для каждой из простых балок:

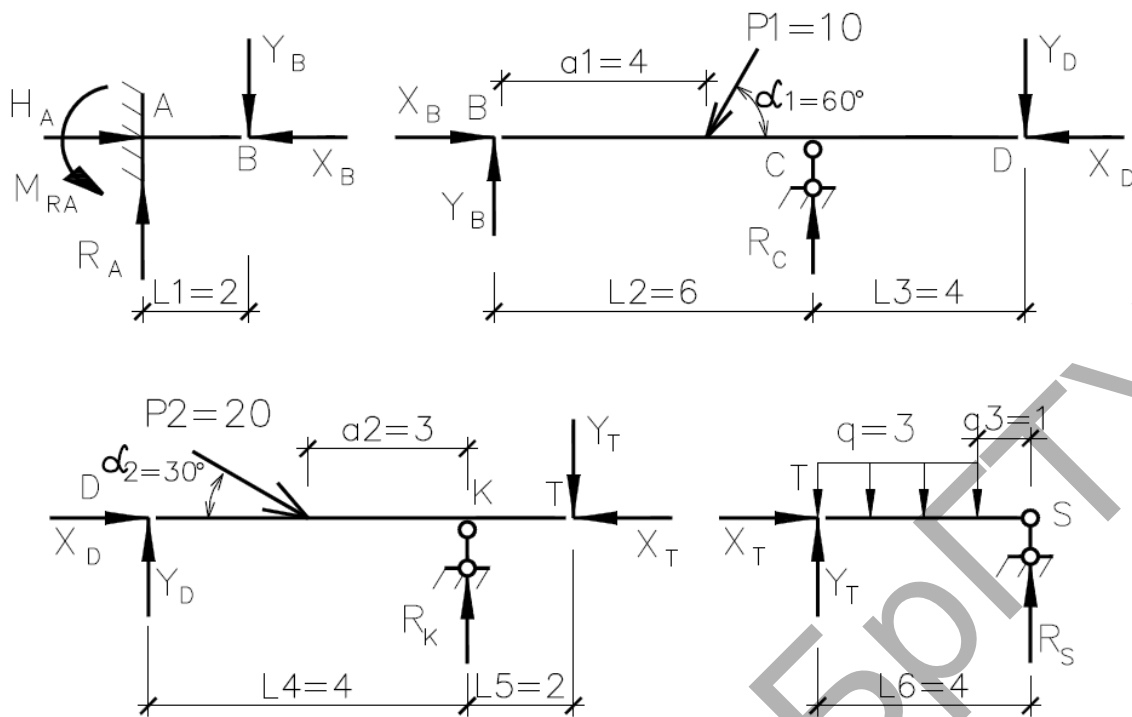


Рисунок 3.2

Для определения неизвестных усилий и реакций, решим систему уравнений, составленную уравнений равновесия для простых балок:

$$\left. \begin{cases} H_A - X_B = 0; \\ R_A - Y_B = 0; \\ -M_{RA} + Y_B \cdot L_1 = 0; \end{cases} \right\} \text{Уравнения равновесия балки AB}$$

$$\left. \begin{cases} X_B - P_1 \cdot \cos \alpha_1 - X_D = 0; \\ Y_B - P_1 \cdot \sin \alpha_1 + R_C - Y_D = 0; \\ P_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot a_1 - R_C \cdot L_2 + Y_D \cdot (L_2 + L_3) = 0; \end{cases} \right\} \text{Уравнения равновесия балки BCD}$$

$$\left. \begin{cases} X_D - X_T + P_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0; \\ Y_D + R_K - Y_T - P_2 \cdot \sin \alpha_2 = 0; \\ P_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot (L_4 - a_2) - R_K \cdot L_4 + Y_T \cdot (L_4 + L_5) = 0; \end{cases} \right\} \text{Уравнения равновесия балки DKT}$$

$$\left. \begin{cases} X_T = 0; \\ Y_T + R_S - q \cdot (L_6 - a_3) = 0; \\ q \cdot (L_6 - a_3)^2 \cdot 0,5 - R_S \cdot L_6 = 0. \end{cases} \right\} \text{Уравнения равновесия балки TS}$$

После определения значений усилий, строим эпюры M , Q , N (рис. 3.4). При этом необходимо выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр.

Для статической проверки составим три уравнения равновесия балки в це-

лом, подставив полученные значения опорных реакций:

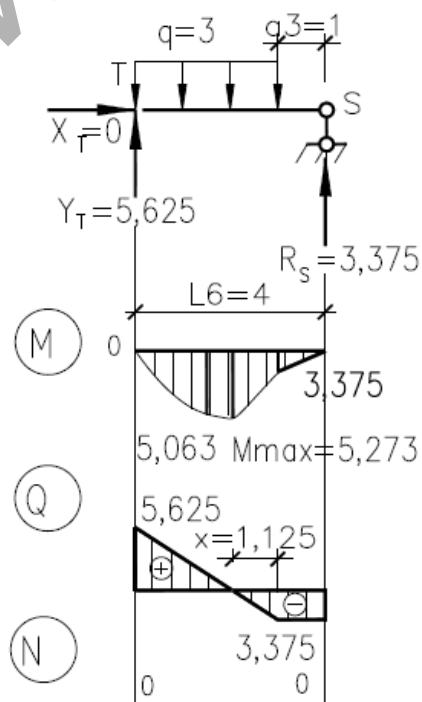
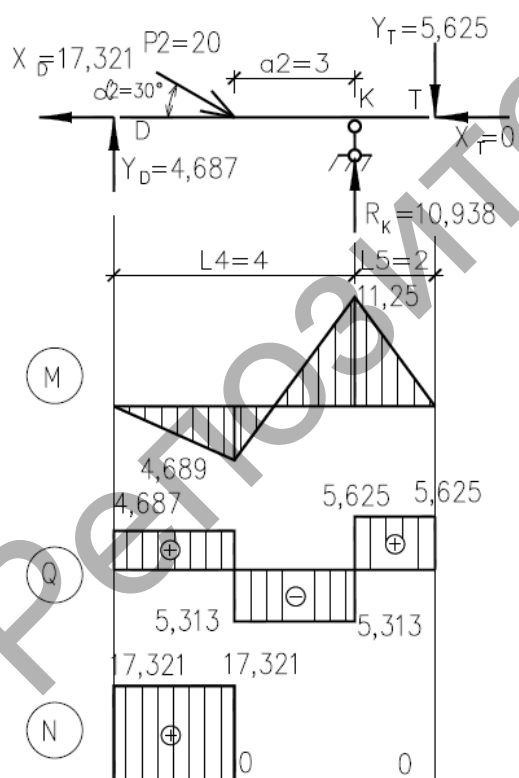
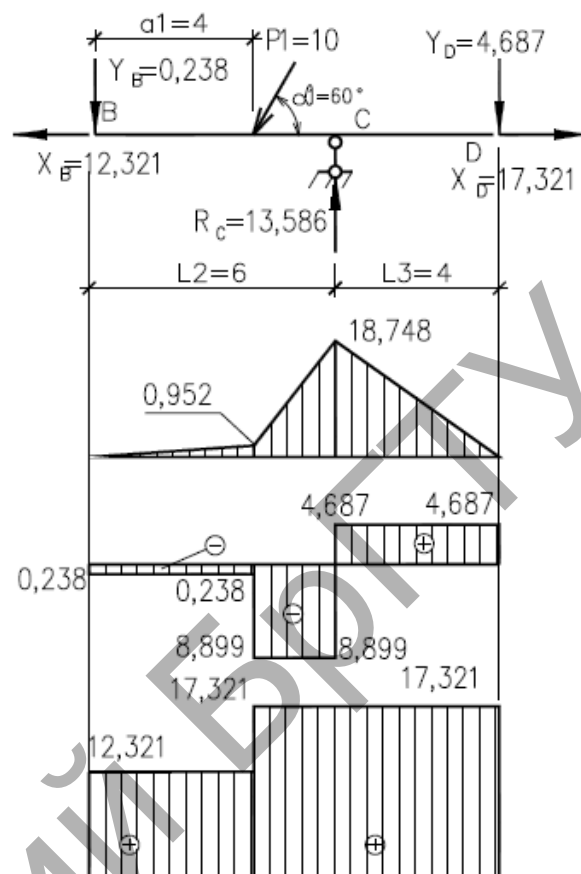
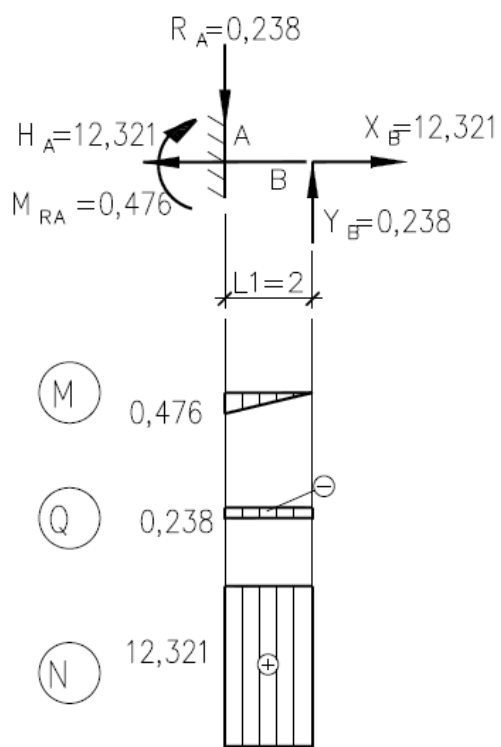
$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad & H_A - P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0; \\ \sum Y = 0; \quad & R_A - P_1 \cdot \sin \alpha_1 - P_2 \cdot \sin \alpha_2 + R_C + R_K + R_S - q \cdot (L_6 - a_3) = 0; \\ \sum M_A = 0; \quad & -M_{RA} + P_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot (L_1 + a_1) + P_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + (L_4 - a_2)) + \\ & + q \cdot (L_6 - a_3) \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + \frac{(L_6 - a_3)}{2}) - R_C \cdot (L_1 + L_2) - \\ & - R_K \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) - R_S \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6). \end{aligned}$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD. верификация результатов в ПК см. ПРИЛОЖЕНИЕ В.

Теперь можно рассмотреть каждую балку отдельно с приложенными внешними нагрузками, опорными реакциями и усилиями между соседними балками (в шарнирах) и построить для каждой из них эпюры внутренних сил M , Q , N . Совместив эпюры усилий во всех простых балках на одной схеме, получим эпюры внутренних сил M , Q , N для многопролетной балки (рис.3.3).

Определим экстремум в балке TS:

$$\begin{aligned} \frac{5,625}{3-x} &= \frac{3,375}{x}; \rightarrow 5,625 \cdot x = (3-x) \cdot 3,375; \\ (5,625 + 3,375) \cdot x &= 3 \cdot 3,375; \rightarrow x = 1,125 \text{ м}; \\ M_{\max} &= -3,375 \cdot 2,125 + 3 \cdot 1,125 \cdot \frac{1,125}{2} = -5,273 \frac{\text{кН}}{\text{м}}. \end{aligned}$$



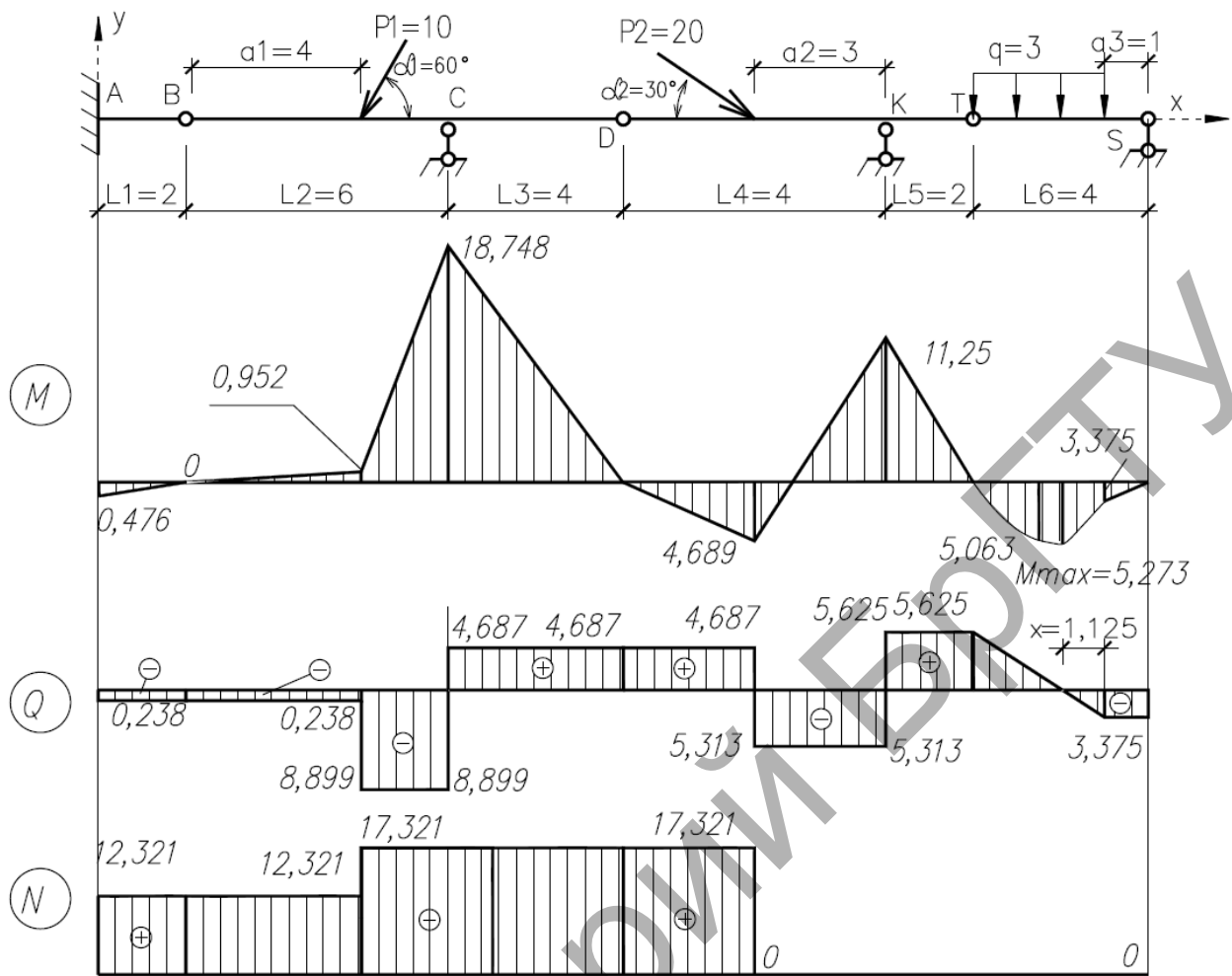


Рисунок 3.4

4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам

Цель работы: изучить применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам и решение систем линейных алгебраических уравнений.

Порядок выполнения работы:

- 1) разбить раму на простые стержни (прямолинейные элементы, в пределах которых нет изменения нагрузок), показав усилия взаимодействия между ними;
- 2) получить общую систему уравнений равновесия рамы, составив уравнения равновесия для каждого из стержней;
- 3) определить усилия в стержнях рамы, решив полученную систему линейных алгебраических уравнений в системе компьютерной алгебры MathCAD;
- 4) построить эпюры усилий M , Q , N рамы;
- 5) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр усилий и статическую проверку.

Пример расчета. Рассмотрим расчет рамы, представленной на рис. 4.1 (при $d = 2$ м; $h = 2$ м; $P = 4$ кН; $m = 10$ кНм; $q = 10$ кН/м).

Разобьём раму на простые стержни, нумеруя узлы их соединения (1–7). Обозначим реакции опор R_{x1} , R_{y1} , R_6 , R_7 (рис. 4.2).

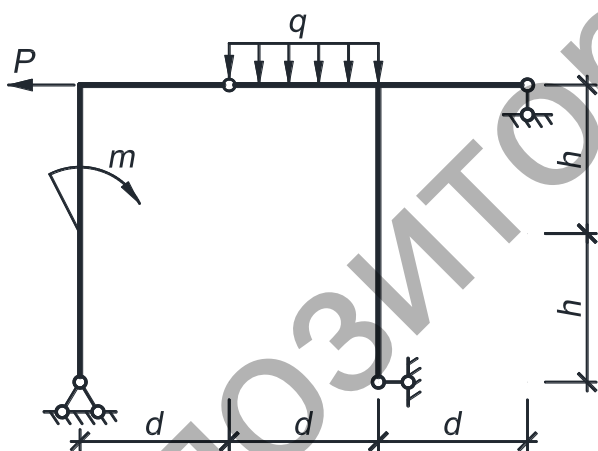


Рисунок 4.1

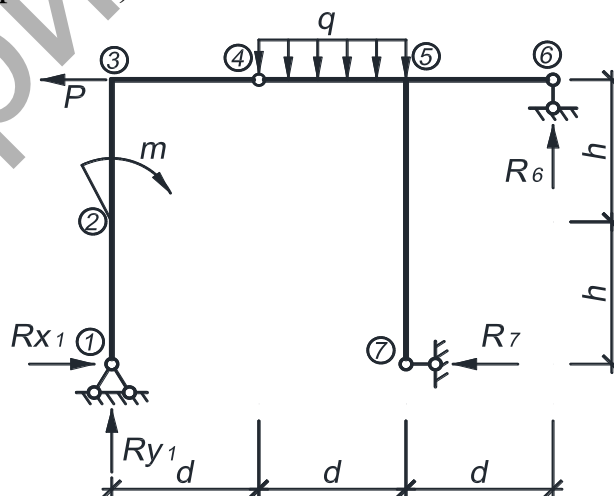


Рисунок 4.2

Вырезая каждый стержень, обозначим неизвестные внутренние усилия стержней рамы в характерных сечениях через x_i , y_i (продольные и поперечные усилия) и z_i (моменты), где i – номер характерного сечения (рис. 4.3). В случае соединения трех стержней в одном узле, вторую пару внутренних усилий будем обозначать через x'_i , y'_i , z'_i (см. узел 5).

В шарнирных соединениях отсутствуют моменты, поэтому там обозначаем только продольные и поперечные усилия (в узле 4 – x_4 , y_4). При наличии сосредоточенной нагрузки или момента в узле, относим их к тому стержню, конечная точка которого примыкает к данному сечению (в примере:

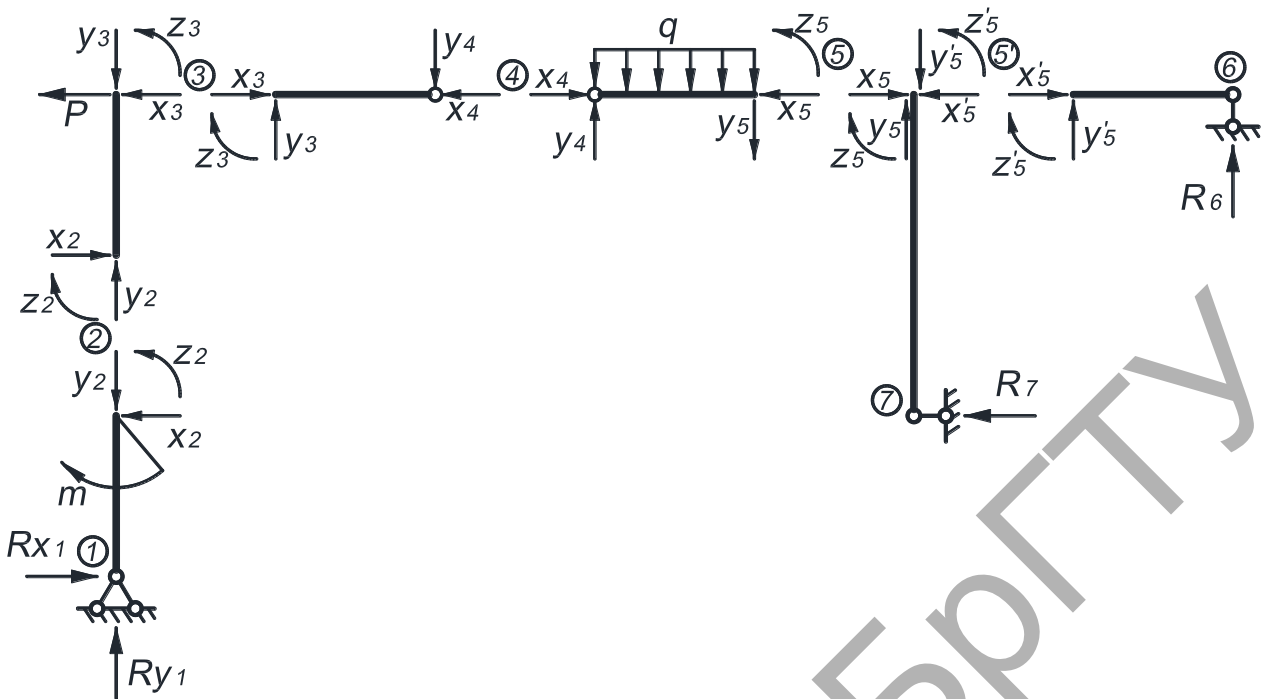


Рисунок 4.3

внешний момент m относим к стержню 1–2; сосредоточенную нагрузку P – к стержню 2–3).

Составим уравнения равновесия для каждого стержня рамы, проецируя усилия и нагрузки на соответствующие оси. Суммы моментов берем относительно начальных сечений стержней:

Стержень 1-2:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & R_x - x_2 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & R_y - y_2 &= 0; \\ \sum M_1 &= 0; & m - x_2 \cdot h - z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Стержень 2-3:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & -P + x_2 - x_3 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & y_2 - y_3 &= 0; \\ \sum M_2 &= 0; & -P \cdot h - x_3 \cdot h + z_2 - z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Стержень 3-4:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & x_3 - x_4 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & y_3 - y_4 &= 0; \\ \sum M_3 &= 0; & y_4 \cdot d + z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Стержень 4-5:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & x_4 - x_5 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & -q \cdot d + y_4 - y_5 &= 0; \\ \sum M_4 &= 0; & q \cdot d \cdot d/2 + y_5 \cdot d - z_5 &= 0. \end{aligned}$$

Стержень 5-6:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & x'_5 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & R_6 + y'_5 &= 0; \\ \sum M_5 &= 0; & -R_6 \cdot d + z'_5 &= 0. \end{aligned}$$

Стержень 5 -7:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & -R_7 + x_5 - x'_5 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & y_5 - y'_5 &= 0; \\ \sum M_5 &= 0; & R_7 \cdot 2h + z_5 - z'_5 &= 0. \end{aligned}$$

Для определения неизвестных усилий и реакций, решим систему уравнений, составленную из полученных ранее уравнений равновесия стержней рамы:

$$\left\{ \begin{array}{l} Rx_1 - x_2 = 0; \\ Ry_1 - y_2 = 0; \\ m - x_2 \cdot h - z_2 = 0; \\ -P + x_2 - x_3 = 0; \\ y_2 - y_3 = 0; \\ -P \cdot h - x_3 \cdot h + z_2 - z_3 = 0; \\ x_3 - x_4 = 0; \\ y_3 - y_4 = 0; \\ y_4 \cdot d + z_3 = 0; \\ x_4 - x_5 = 0; \\ -q \cdot d + y_4 - y_5 = 0; \\ q \cdot d \cdot d/2 + y_5 \cdot d - z_5 = 0; \\ x'_5 = 0; \\ R_6 + y'_5 = 0; \\ -R_6 \cdot d + z'_5 = 0; \\ -R_7 + x_5 - x'_5 = 0; \\ y_5 - y'_5 = 0; \\ R_7 \cdot 2h + z_5 - z'_5 = 0. \end{array} \right.$$

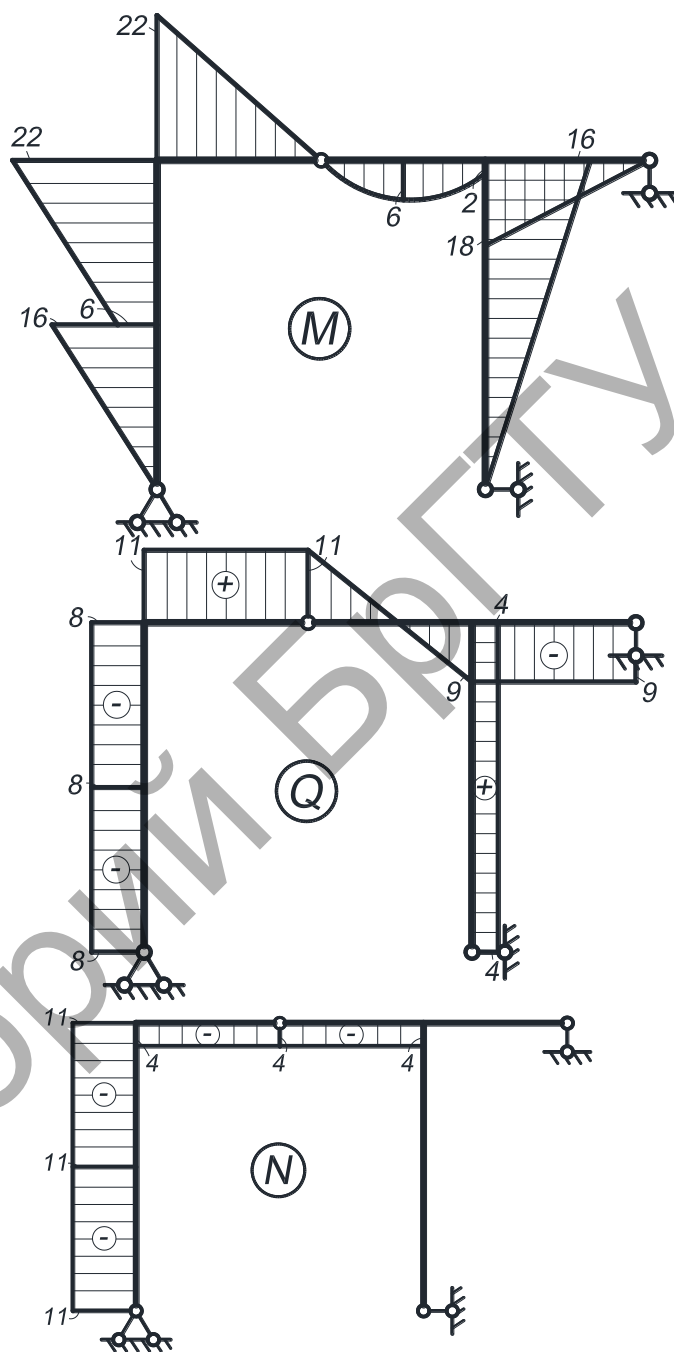


Рисунок 4.4

После определения значений усилий, строим эпюры M , Q , N (рис. 4.4). При этом необходимо выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр.

Для статической проверки составим три уравнения равновесия рамы, подставив полученные значения опорных реакций:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad Rx_1 + P - R_7 &= 0; \\ \sum Y = 0; \quad Ry_1 - q \cdot d + R_6 &= 0; \\ \sum M_4 = 0; \quad Ry_1 \cdot d - Rx_1 \cdot 2h - m + q \cdot d \cdot d/2 - R_6 \cdot 2d + R_7 \cdot 2h &= 0. \end{aligned}$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD, верификация результатов в ПК см. ПРИЛОЖЕНИЕ С.

Репозиторий БРГТУ

5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Расчет усилий в трехшарнирных арках

Цель работы: изучить расчет усилий и построение эпюр усилий в трехшарнирных арках с использованием численного подхода.

Порядок выполнения работы:

1) определить опорные реакции и выполнить расчет усилий M , Q , N в сечениях арки с заданным шагом, обеспечивающим достаточно точное представление нелинейных по длине арки зависимостей усилий;

2) построить для рассматриваемой арки эпюры усилий M , Q , N ;

3) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр внутренних сил M , Q и N .

Примечание: все необходимые расчеты выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Пример расчета. Рассмотрим расчет арки пролетом $L = 32$ м со стрелой подъема $f = 10$ м, ось которой изменяется по круговому закону (рисунок 5.1).

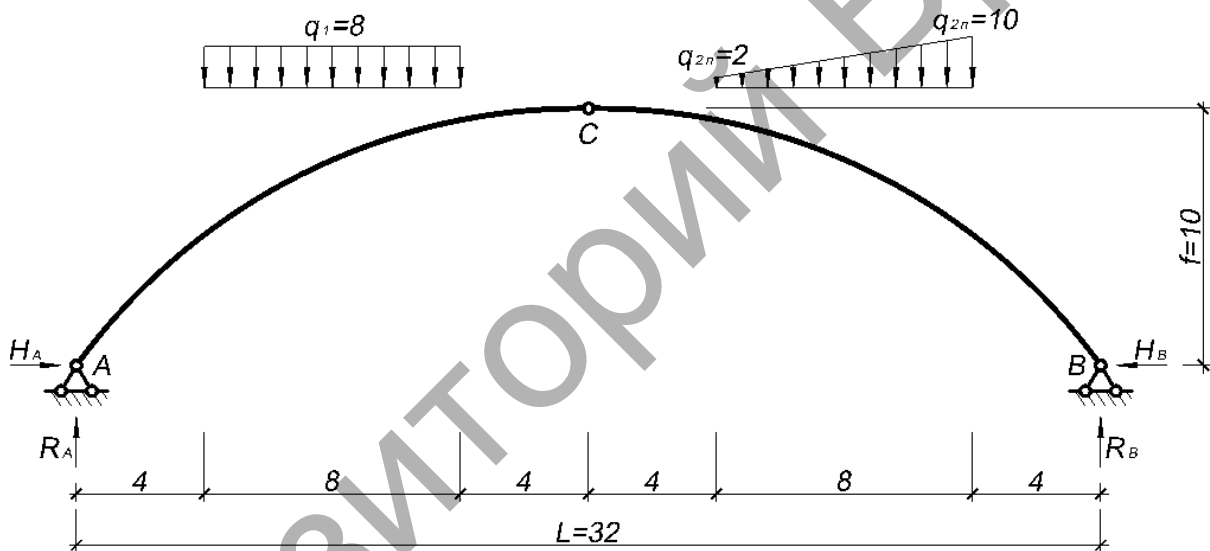


Рисунок 5.1

Определим опорные реакции арки, используя уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot L - q_1 \cdot 8 \cdot 24 - q_{2Л} \cdot 8 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot (q_{2П} - q_{2Л}) \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 8 + 4\right) = 0;$$

$$R_A = \frac{q_1 \cdot 8 \cdot 24 + q_{2Л} \cdot 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot (q_{2П} - q_{2Л}) \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 8 + 4\right)}{L};$$

$$\sum M_A = 0; -R_B \cdot L + q_1 \cdot 8 \cdot 8 + q_{2Л} \cdot 8 \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot (q_{2П} - q_{2Л}) \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 20\right) = 0;$$

$$R_B = \frac{q_1 \cdot 8 \cdot 8 + q_{2Л} \cdot 8 \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot (q_{2П} - q_{2Л}) \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 20\right)}{L};$$

$$\sum M_C^{лев} = 0; -H_A \cdot f + R_A \cdot \frac{L}{2} - q_1 \cdot 8 \cdot 8 = 0; \quad H_A = \frac{R_A \cdot \frac{L}{2} - q_1 \cdot 8 \cdot 8}{f}.$$

Так как арка нагружена только вертикальными нагрузками, горизонтальные реакции опор будут одинаковы: $H = H_A = H_B$.

Проверка нахождения реакций опор:

$$\sum M_C^{np} = 0; -R_B \cdot \frac{L}{2} + H_B \cdot f + q_{2Л} \cdot 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot (q_{2П} - q_{2Л}) \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 4 \right) = 0.$$

Усилия в арке определяем методом сечений. Разбиваем пролет арки на n одинаковых частей ($\Delta x = L/n$), обеспечивающих достаточное число сечений для представления нелинейных по длине арки зависимостей. Отметим, что, чем на большее число частей разобьем пролет, тем меньше будет шаг разбиения Δx , и тем больше будем иметь расчетных сечений для вычисления ординат усилий, и тем более точно можно будет отобразить эпюры усилий.

В данном примере разобьем пролет арки на 16 частей ($\Delta x = 32/16 = 2$ м) и получим 17 расчетных сечений (0, 1, 2, ..., 16).

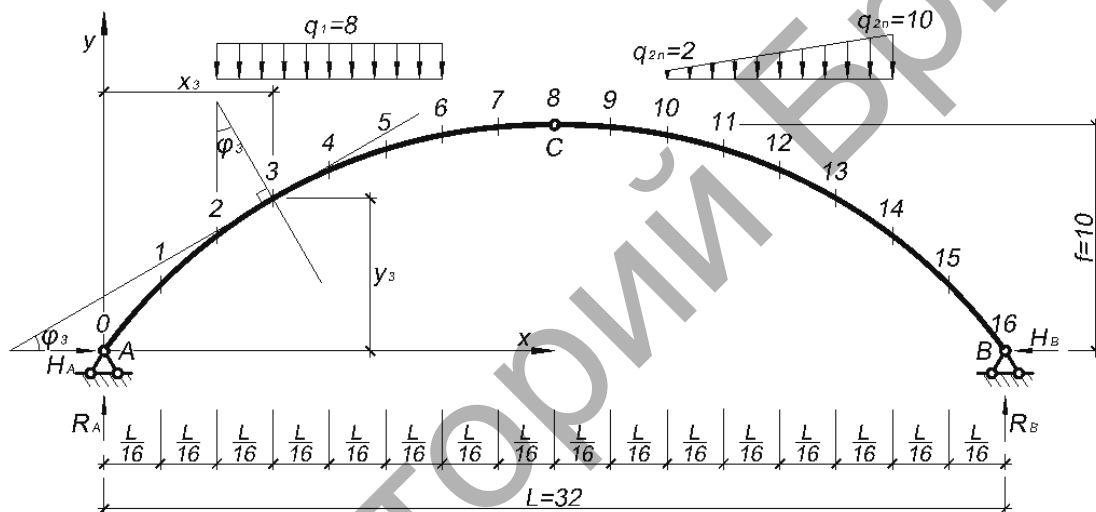


Рисунок 5.2

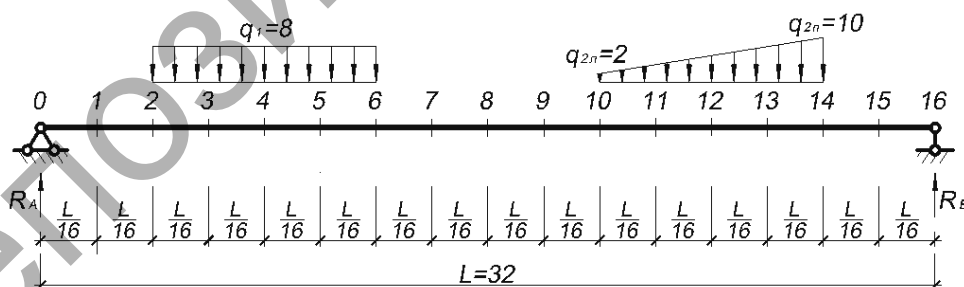


Рисунок 5.3

Величины усилий M , Q , N в сечениях арки определяются по формулам:

$$M_i = M_{0i} - H \cdot y_i;$$

$$Q_i = Q_{0i} \cos \varphi_i - H \sin \varphi_i;$$

$$N_i = -(Q_{0i} \sin \varphi_i + H \cos \varphi_i),$$

где: M_{0i} , Q_{0i} – изгибающий момент и поперечная сила в i -ом сечении простой двухопорной балки, имеющей такой же пролет, как арка, и нагруженной такой же нагрузкой, как арка (рисунок 5.3); H – распор арки; y_i , $\sin \varphi_i$, $\cos \varphi_i$ – ордина-

та, синус и косинус угла наклона касательной к оси арки по отношению к горизонтальной оси (либо угол между нормалью к оси арки и вертикальной осью) для i -го сечения арки (рисунок 5.1).

Абсцисса x_i для каждого (i) сечения определяется выражением: $x_i = \Delta x \cdot i$.

Ординаты y_i , синусы и косинусы углов наклона касательных ($\sin \varphi_i, \cos \varphi_i$) для сечений найдем, используя геометрические зависимости, представленные для различных очертаний осей арок в приложении к данному разделу.

Все расчеты для сечений и построения эпюр усилий выполняем в системе компьютерной алгебры MathCAD, верификация результатов в программных комплексах см. ПРИЛОЖЕНИЕ D.

Геометрические характеристики трехшарнирных арок:

а) для круговых арок:

$$\begin{aligned} R &= \frac{4f^2 + l^2}{8f}; & y &= \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f; \\ \sin \varphi &= \frac{l - 2x}{2R}; & \cos \varphi &= \frac{y + R - f}{R} = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}; \end{aligned} \quad (5.1)$$

б) для параболических арок:

$$\begin{aligned} y &= \frac{4f}{l^2} x(l - x); & \operatorname{tg} \varphi = y' &= \frac{4f}{l^2} (l - 2x); \\ \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; & \sin \varphi &= \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi; \end{aligned} \quad (5.2)$$

в) для синусоидальных арок:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l}; \quad \sin \varphi \text{ и } \cos \varphi \rightarrow \text{см. (4.2)}; \quad (5.3)$$

г) для эллиптических арок:

$$y = k \sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - ka + f; \quad \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{k \left(\frac{l}{2} - x\right)}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2}}; \quad (5.4)$$

где: $a = \frac{f}{2k} + \frac{kl^2}{8f}; \quad k = \frac{4f}{l}; \quad \sin \varphi \text{ и } \cos \varphi \rightarrow \text{см. (5.2)};$

д) для гиперболических арок:

$$y = f + a - \sqrt{\frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{k^2} + a^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)}{k^2 \sqrt{\frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{k^2} + a^2}}; \quad (5.5)$$

где: $a = \frac{l^2}{8k^2 f} - \frac{f}{2}; \quad k = \frac{l}{\pi f}; \quad \sin \varphi \text{ и } \cos \varphi \rightarrow \text{см. (5.2)}.$

Репозиторий БРГТУ

Репозиторий БРГТУ

6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Расчет двухшарнирной арки с использованием численного интегрирования

Цель работы: изучить расчет усилий и построение эпюр усилий в двухшарнирных арках с использованием численного подхода.

Порядок выполнения работы:

- 1) определить опорные реакции и выполнить расчет усилий M , Q , N в сечениях арки с заданным шагом, обеспечивающим достаточно точное представление нелинейных по длине арки зависимостей усилий;
- 2) построить для рассматриваемой арки эпюры усилий M , Q , N ;
- 3) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр внутренних сил M , Q и N .

Примечание: все необходимые расчеты выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Пример расчета. Выполним расчет двухшарнирной арки с затяжкой представленной на рисунке 6.1.

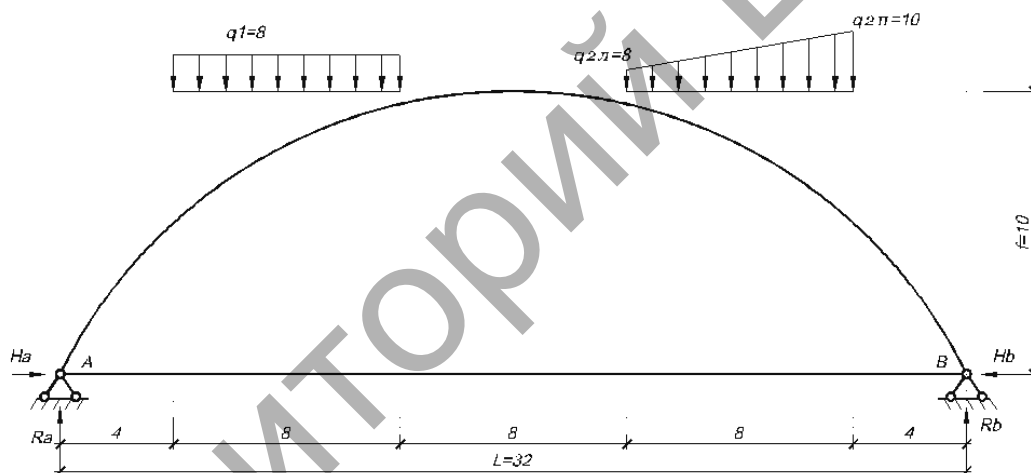


Рисунок 6.1

Жесткость арки принята постоянной по длине стержня ($EJ = Const$), жесткость затяжки принята равной $EA_{зат} = 5EJ$ ($k_{зат} = 5$). Ось стержня арки определяется круговой зависимостью, как и в лабораторной работе № 4. Основную систему метода сил получим, разрезав затяжку.

Усилия в арке определяем методом сечений. Разбиваем пролет арки на n одинаковых частей ($\Delta x = L/n$), обеспечивающих достаточное число сечений для представления нелинейных по длине арки зависимостей. Отметим, что, чем на большее число частей разобьем пролет, тем меньше будет шаг разбиения Δx , и тем больше будем иметь расчетных сечений для вычисления ординат усилий, и тем более точно можно будет отобразить эпюры усилий.

В данном примере разобьем пролет арки на 16 частей ($\Delta x = 32/16 = 2$ м) и получим 17 расчетных сечений (0, 1, 2, ..., 16).

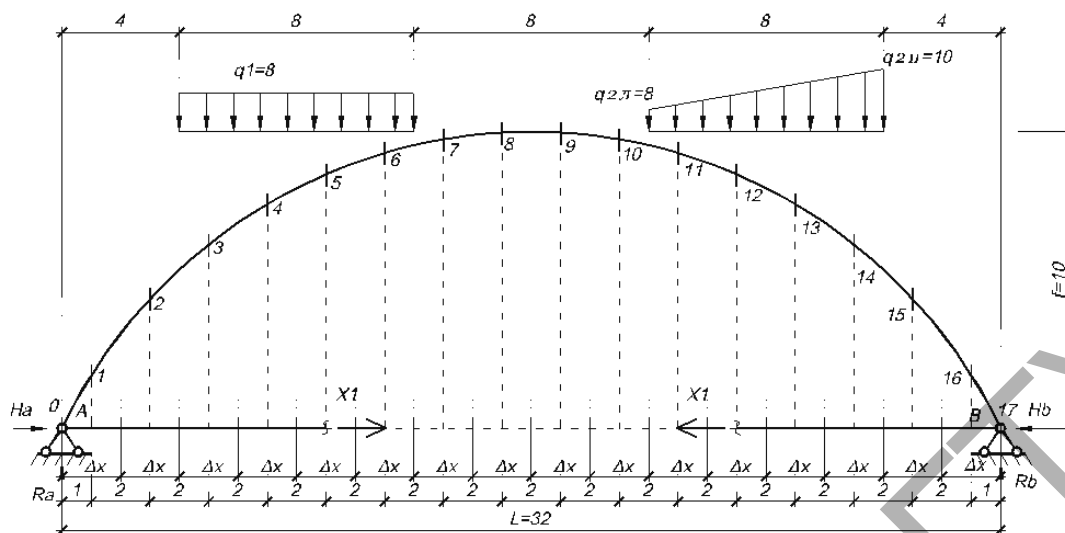


Рисунок 6.2

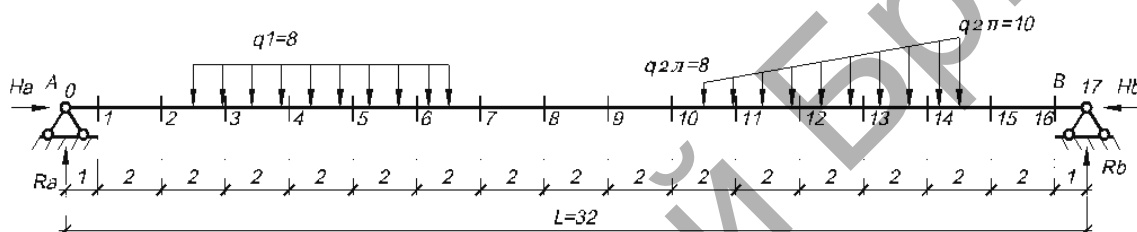


Рисунок 6.3

Расчетные величины (y , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, M_P и т.д.) необходимо вычислять в средних точках участков Δx , координаты которых можно определить по выражению: $x_i = 0,5\Delta x + \Delta x (i - 1)$.

Для арок постоянного сечения жесткости их будут константами и их можно вынести за суммы. Если ввести при этом обозначения:

$$k_G = \frac{GA}{EJ}; \quad k_N = \frac{EA}{EJ}; \quad k_{зам} = \frac{EA_{зам}}{EJ}.$$

$$\delta_{11} = \frac{\Delta x}{EJ} \left(\sum_1^n \frac{y^2}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{k_G} \sum_1^n \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + \frac{1}{k_N} \sum_1^n \cos \varphi + \frac{n}{k_{зам}} \right);$$

$$\Delta_{11} = -\frac{\Delta x}{EJ} \left(\sum_1^n \frac{y M_P}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{k_G} \sum_1^n \frac{\sin \varphi Q_P}{\cos \varphi} + \frac{1}{k_N} \sum_1^n N_P \right).$$

Вычислив перемещения δ_{11} и Δ_{11} , решаем уравнение и находим неизвестное метода сил $X_1 = -\Delta_{11} / \delta_{11}$.

После этого можно построить окончательные эпюры усилий в заданной статически неопределимой арке по формулам:

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + M_P = -y X_1 + M_P;$$

$$Q = \bar{Q}_1 \cdot X_1 + Q_P = -\sin \varphi X_1 + Q_P;$$

$$N = \bar{N}_1 \cdot X_1 + N_P = -\cos \varphi X_1 + N_P;$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD, верификация результатов в ПК см. ПРИЛОЖЕНИЕ Е.

Репозиторий БРГТУ

Репозиторий БРГТУ

Репозиторий БРГТУ

Верификация результатов расчета статически определимой фермы

1. В программном комплексе Лира:

Создание расчетной схемы:

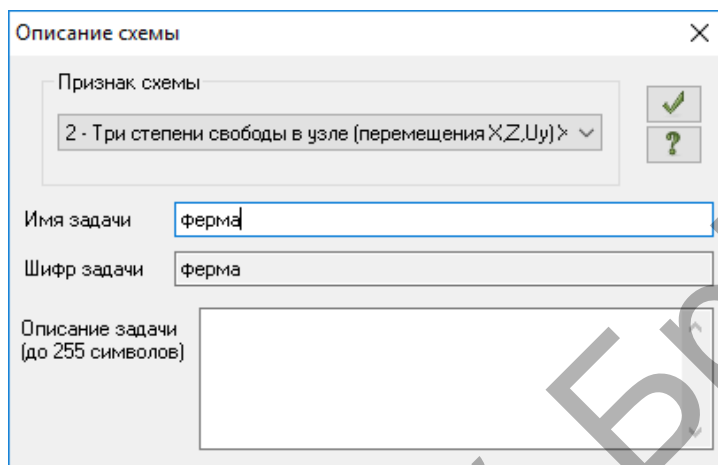


Рисунок А.1 Задание признака схемы и имени задачи

Создаем новую задачу, задаем имя и выбираем из выпадающего списка признак схемы. Признак схемы характеризует систему координат, в данном случае xOz (плоская задача), а также возможные перемещения узлов в этой системе (см. п. 1.1.3), задаем по координатам узлы фермы (см. рис. А.2).

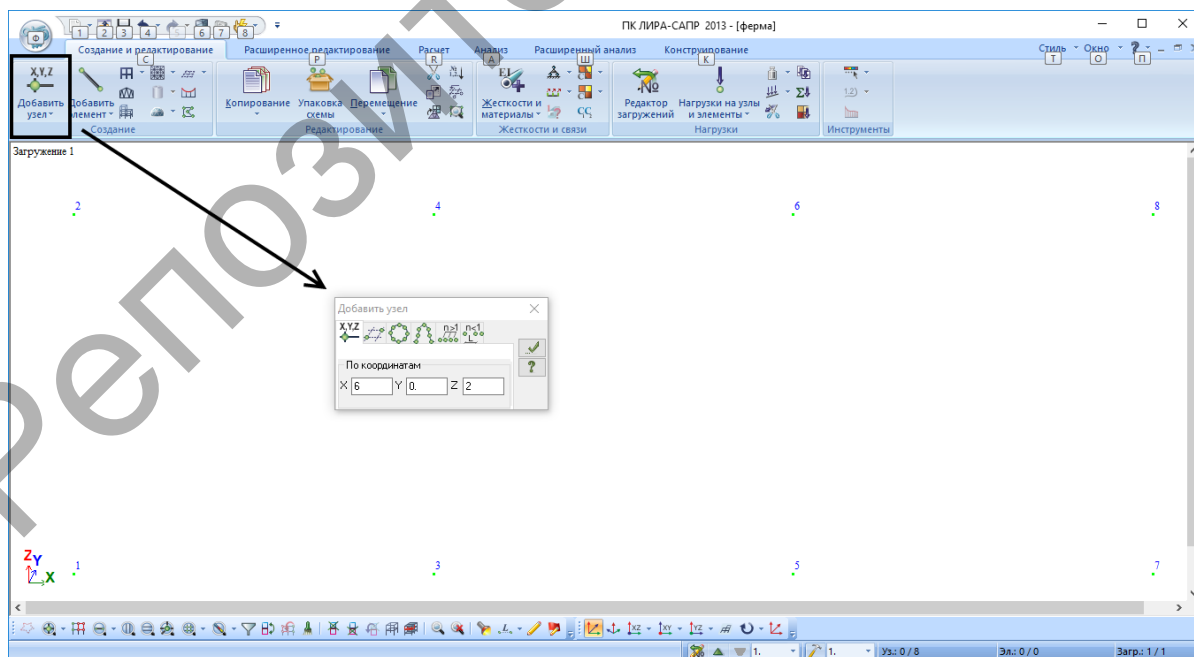


Рисунок А.2 Задание узлов фермы по координатам

По координатам в осях xOz задали 8 узлов, соединяем узлы стержнями – мышкой выбираем последовательность соединения таким образом, чтобы нумерация стержней совпала с нумерацией при решении этой задачи в лабораторной работе № 1 (для удобства проверки полученного результата).

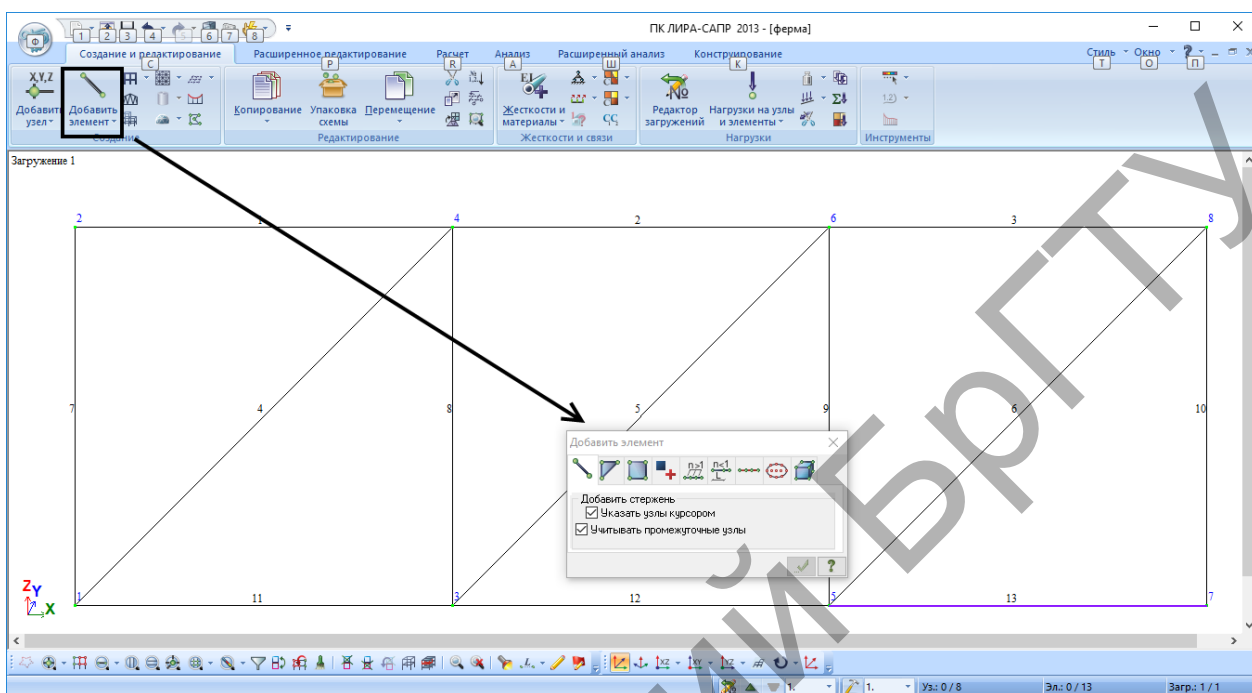


Рисунок А.2 Задание элементов фермы

Расчетная схема построена из стержней и узлов, далее необходимо задать опоры и соединения стержней друг с другом. Расчетная схема имеет две опоры – шарнирно подвижную в узле 1 и шарнирно неподвижную в узле 7. Выделяем узел 1 и назначаем связь по оси z , устанавливая соответствующую галочку (рис. А.3), запрещая перемещение по оси z . Аналогично задаем опору в узле 7, назначая связи по осям z и x .

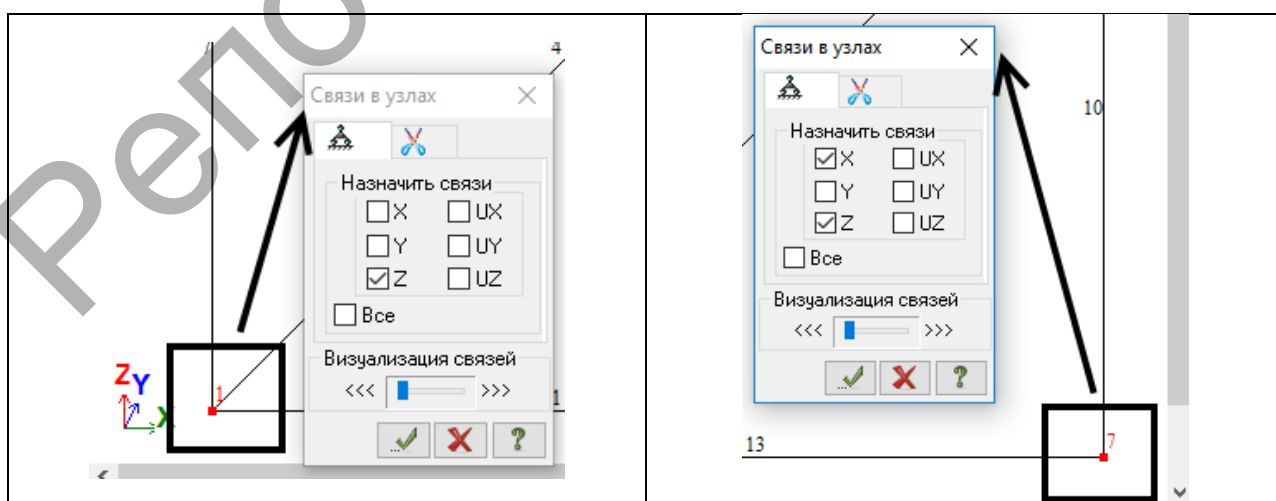
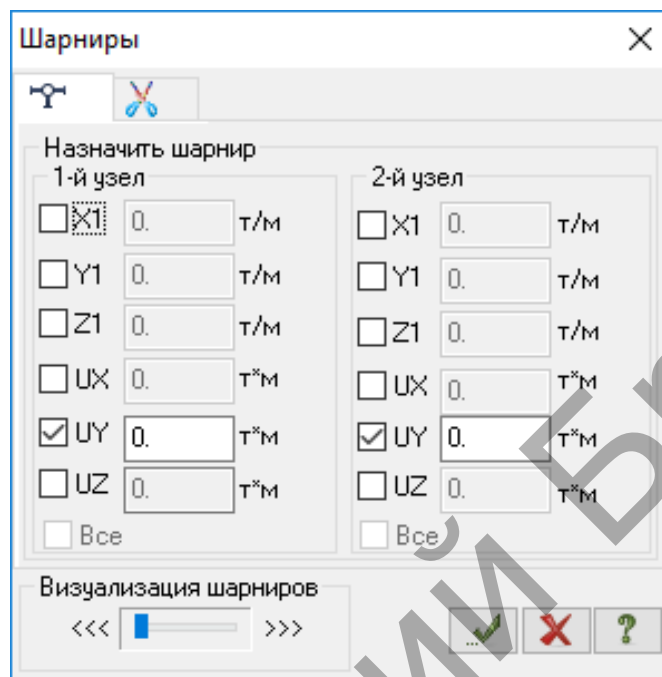


Рисунок А.3 Задание связей для опорных узлов фермы

Узлы фермы представляют собой идеальные шарниры, поэтому элементы (стержни) должны иметь шарнирное соединение в узлах. Выделяем элемент фермы и, нажимая правую кнопку мыши, выбираем из выпадающего списка свойство «Шарниры» (рис. А.4, а).

а)



б)

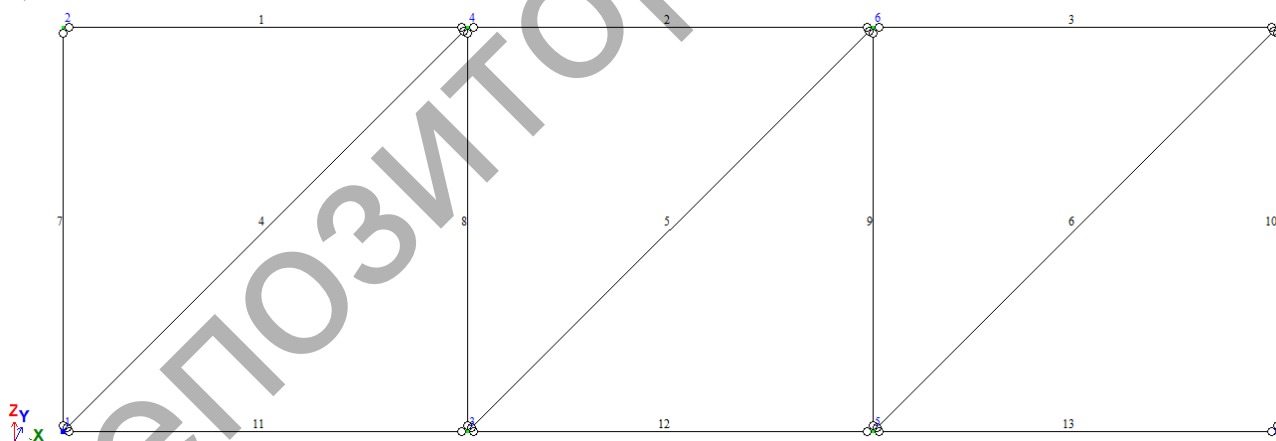


Рисунок А.4 Задание шарниров для элементов фермы

Все стержни шарнирно соединены в узлах, это визуализируется маленькими шарнирами на концах стержней (рис. А.4, б).

Задаем нагрузку на ферму в виде четырех единичных сил в узлы верхнего пояса, для этого открывается вкладка «Задание нагрузок», в которой выбираются соответствующие нагрузки (см. рис. А.5).

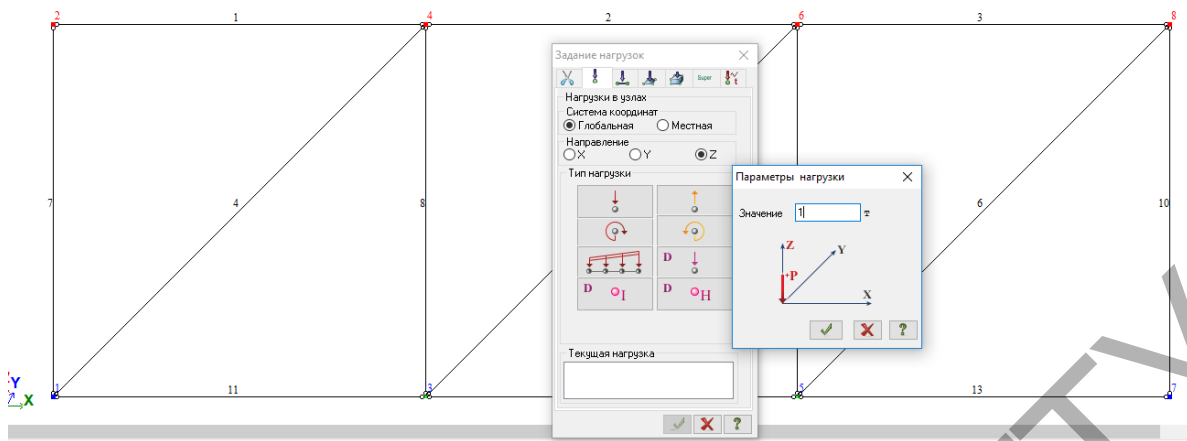


Рисунок А.5 Нагружение фермы сосредоточенными силами

Выделяем элементы фермы, отрываем вкладку «Жесткости и материалы» и выбираем для этих элементов материал и форму сечения из предлагаемых вариантов (см. рис. А.5), – например, гнутосварной профиль «Молодечно» 100х5.

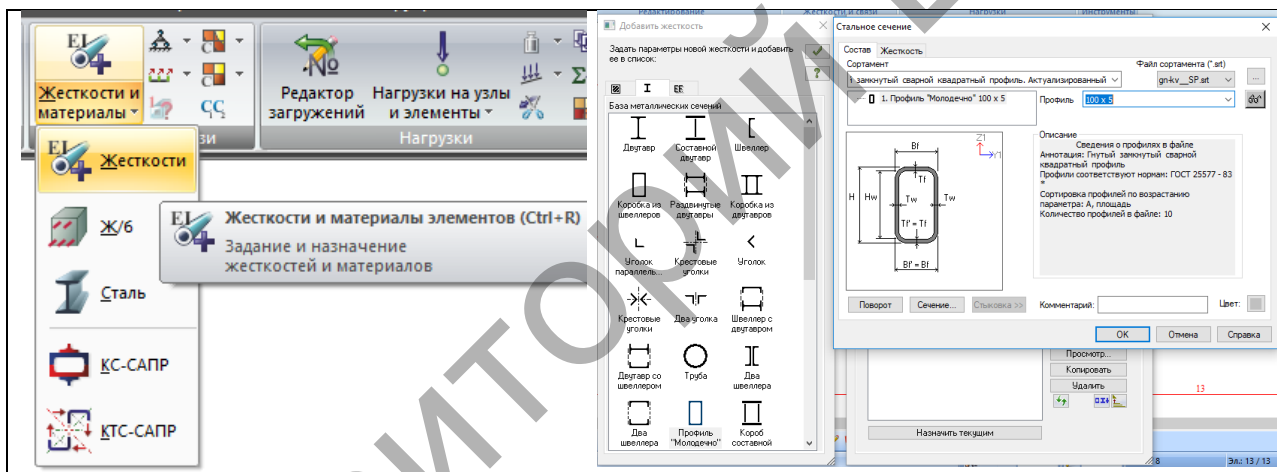
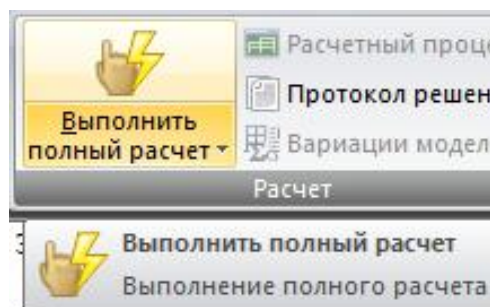


Рисунок А.6 Задание жесткости для элементов конструкции

Перед расчетом выделяем схему и выполняем ее упаковку (см. рис. А.7).

После этого может быть выполнен расчет системы активацией вкладки «Расчет» – «Выполнить полный расчет».



Результаты расчета можно посмотреть на вкладке «Анализ» (см. рис. А.8).

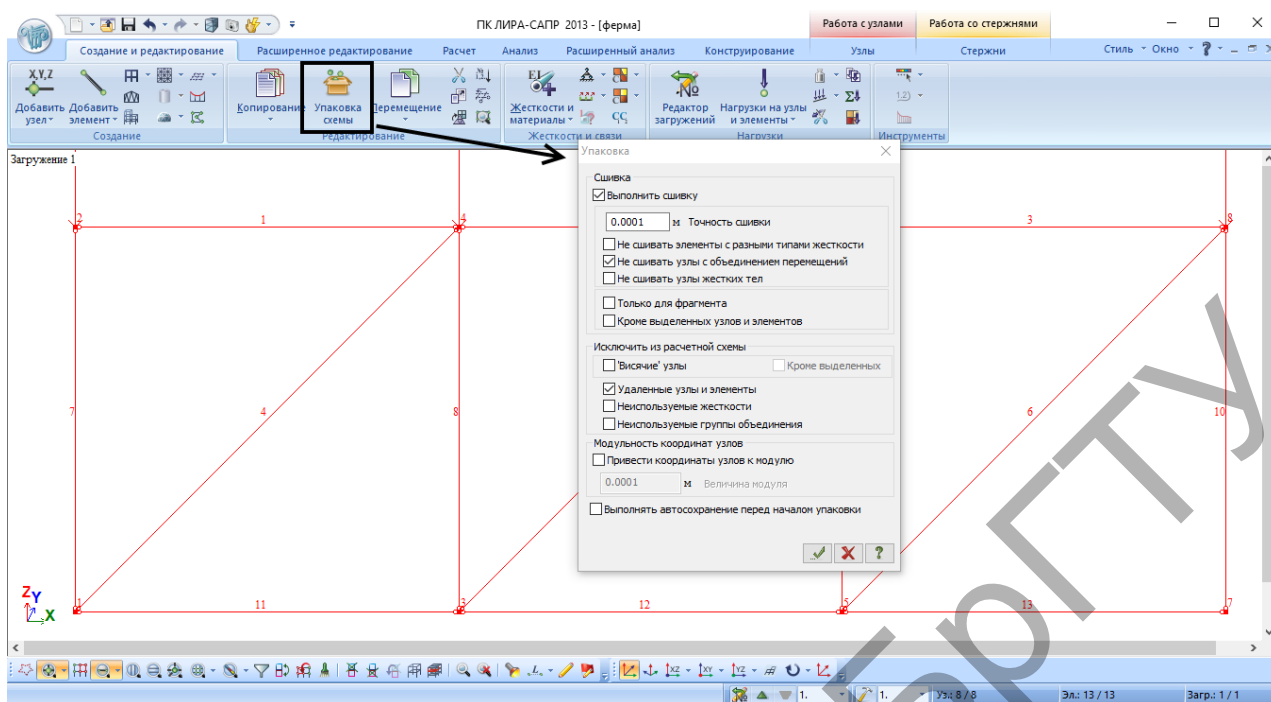


Рисунок А.7 Упаковка схемы

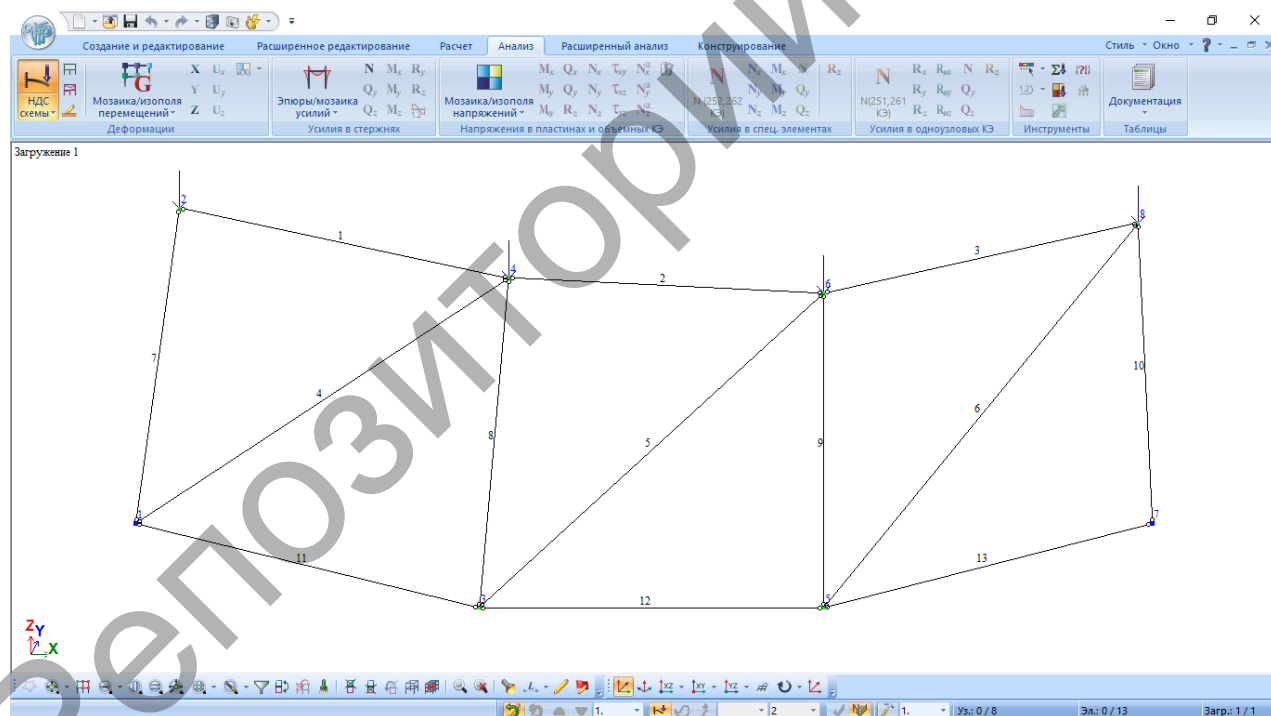


Рисунок А.8 Анализ полученных результатов

Результаты расчета представлены в виде деформированной схемы и усилий в стержнях, которые можно визуализировать в виде эпюры N (см. рис. А.9), а также можно представить в виде интерактивной таблицы. Результаты полностью совпадают с результатами усилий, полученными в лабораторной работе № 1 (см. рис. А.10).

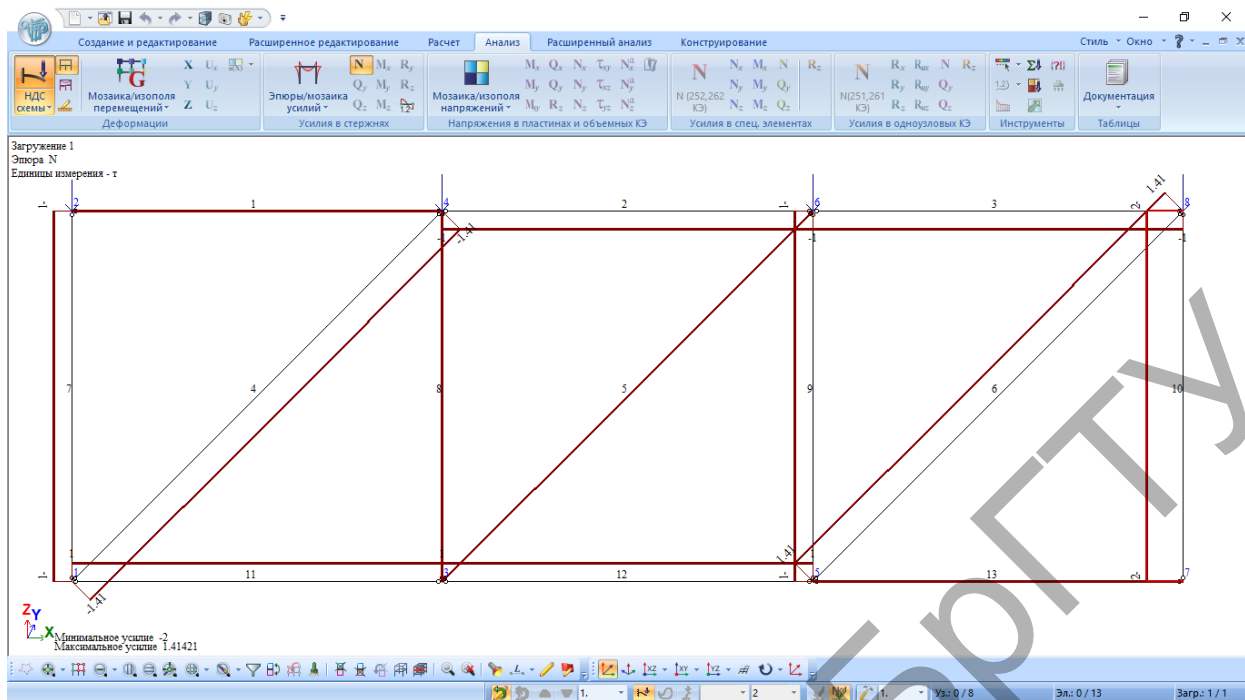


Рисунок А.9 Эюра продольных усилий N

После выполнения расчета по результатам, полученным в программном комплексе, можно выполнить анализ несущей способности принятых профилей сечения по первой и второй группам предельных состояний.

Таблица усилий (стержни)			
№ элем	№ сечен	Усилия	
		N (т)	Mк (т*м)
1	1	0.000	0.000
1	2	0.000	0.000
2	1	- 1.000	0.000
2	2	- 1.000	0.000
3	1	- 1.000	0.000
3	2	- 1.000	0.000
4	1	- 1.414	0.000
4	2	- 1.414	0.000
5	1	0.000	0.000
5	2	0.000	0.000
6	1	1.414	0.000
6	2	1.414	0.000
7	1	- 1.000	0.000
7	2	- 1.000	0.000
8	1	0.000	0.000
8	2	0.000	0.000
9	1	- 1.000	0.000
9	2	- 1.000	0.000
10	1	- 2.000	0.000
10	2	- 2.000	0.000
11	1	1.000	0.000
11	2	1.000	0.000
12	1	1.000	0.000
12	2	1.000	0.000
13	1	0.000	0.000
13	2	0.000	0.000

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1.414 \\ 0 \\ 1.414 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Рисунок А.10 Верификация результатов расчета ПК Лир в табличном виде

2. В программном комплексе SCAD:

Создаем новый проект, выбираем тип схемы: 2 – «Плоская рама» (см. п. 1.1.2.):

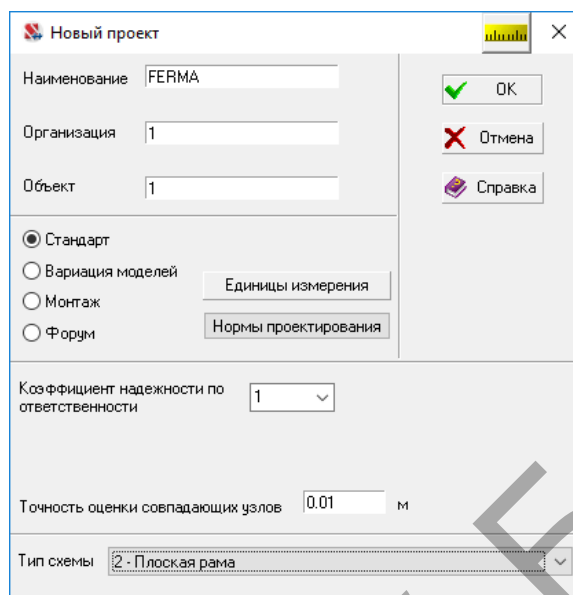


Рисунок А.11 Создаем новый проект

Выбираем на вкладке «Управление»:

Расчетная схема → Графический препроцессор → Геометрия.

На вкладке «Узлы и элементы», нажимаем ввод узлов и по координатам вводим все узлы фермы, при этом надо обязательно нажимать кнопку «Подтвердить» для подтверждения каждой операции.

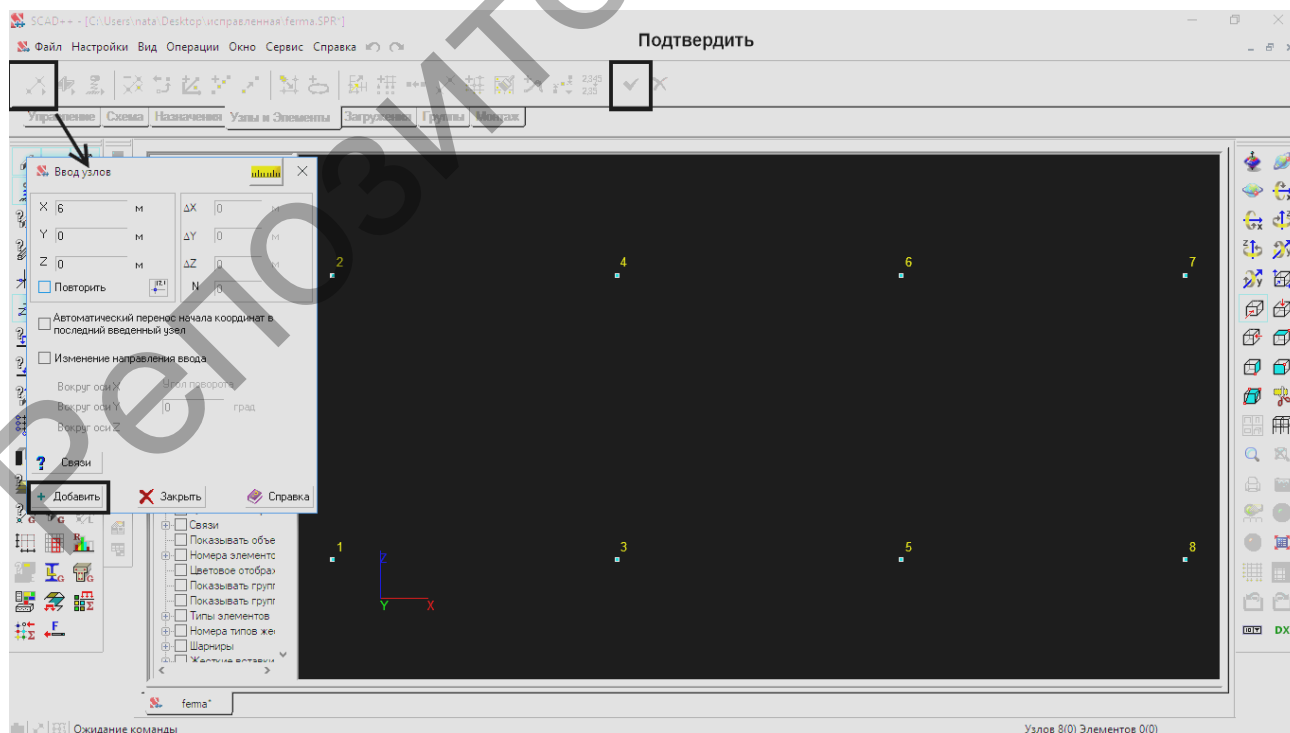


Рисунок А.12 Ввод узлов фермы по координатам

При вводе стержней сразу задаем и жесткость элементов, например, профили металлопроката, квадратная труба 100x5, как и в ПК Лира.

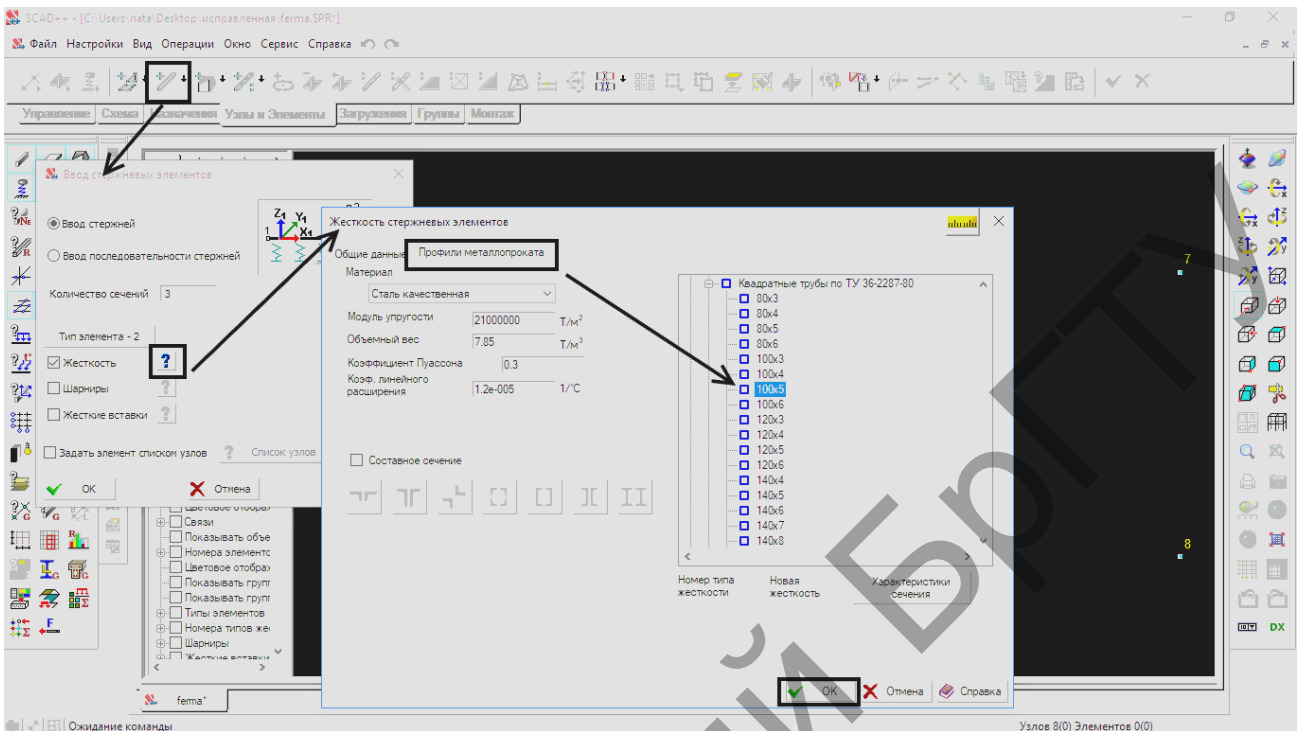


Рисунок А.13 Ввод стержней, задание жесткости стержневых элементов

Задаем элемент фермы списком узлов, прописываем начальный и конечный узел или просто соединяем мышкой узлы:

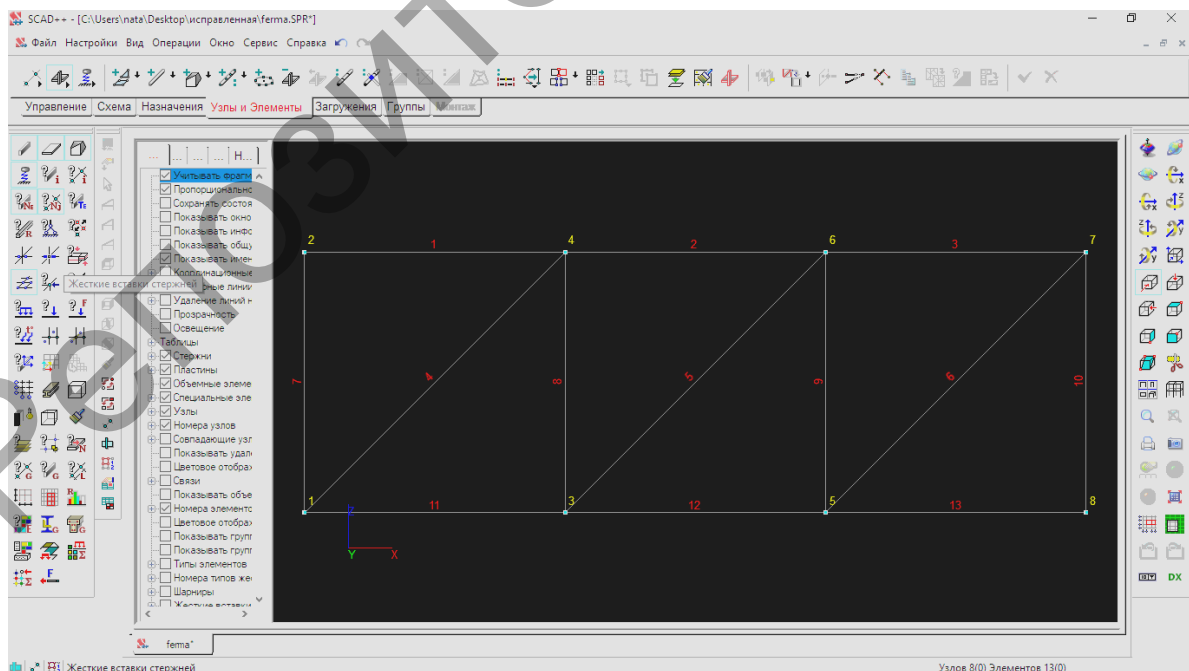


Рисунок А.14 Ввод элементов фермы

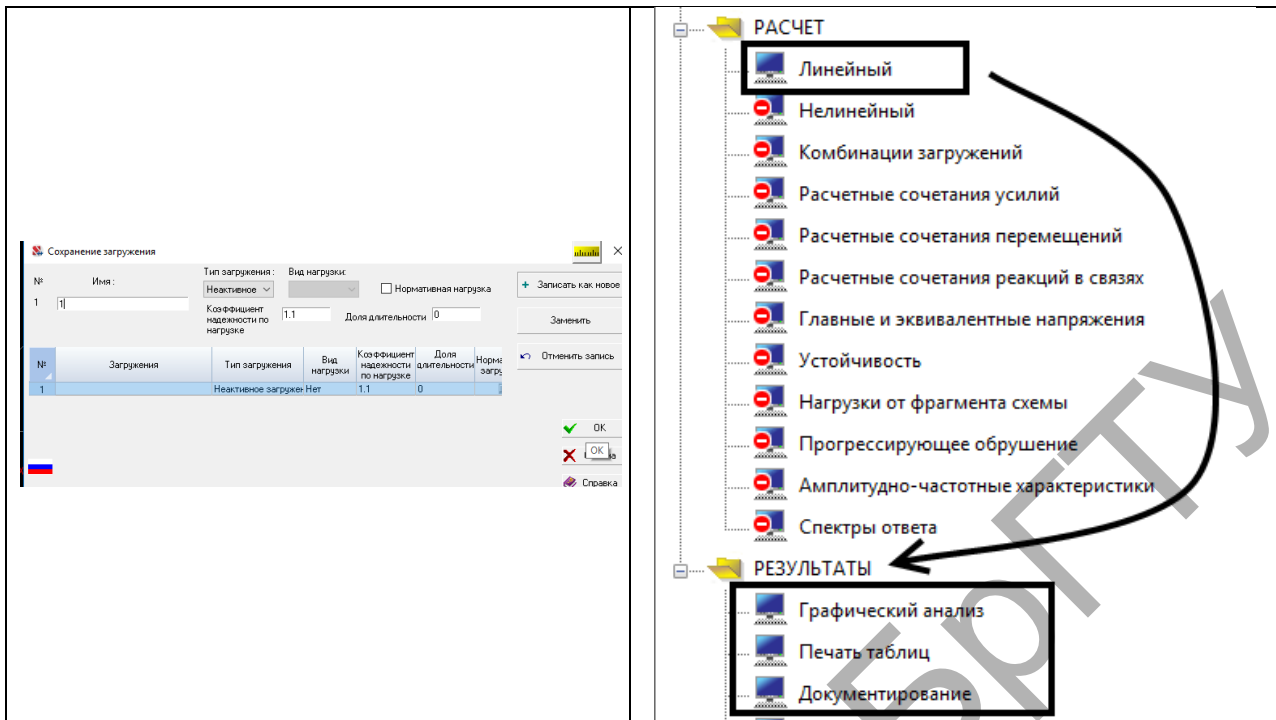


Рисунок А.17 Сохранение загрузки и выполнение расчета

Результаты расчета представляются в виде эпюры продольных сил N , сравнивая которые с усилиями в лабораторной работе № 1, получаем их полное совпадение.

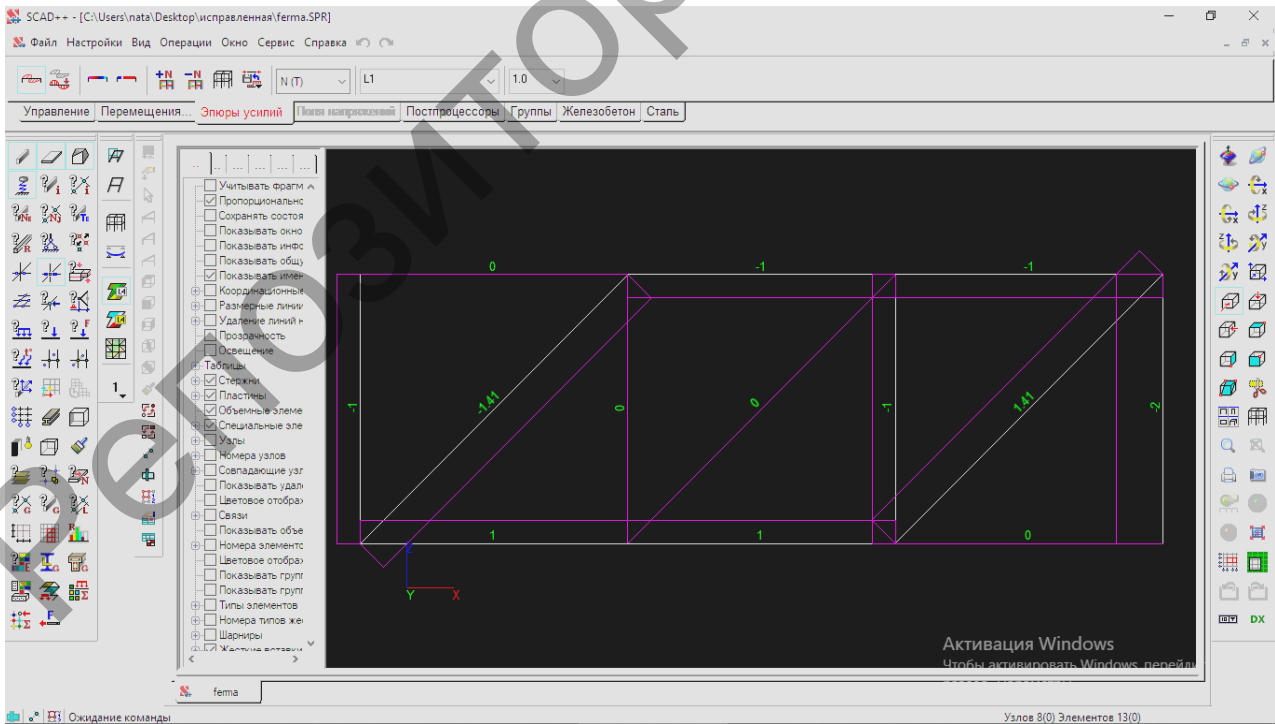


Рисунок А.18 Результаты линейного расчета: Эпюра N

Верификация результатов расчета статически определимой многопролетной балки

1. В программном комплексе Лира

Создается новая расчетная схема с признаком схемы 2 (три степени свободы в узле) и имя задачи, например, «балка». Добавляются узлы по координатам в осях xOz , при этом следует учитывать, что узлы должны быть заданы и в тех точках, в которых имеются шарнирные соединения и приложены сосредоточенные силы и моменты. Задаются стержни путем последовательного соединения соответствующих узлов, после чего для этих стержней задаются жесткости элементов (например, прямоугольный гнутый замкнутый профиль «Молодечно» 140x100x5 см. рис. В.1). Задаются сосредоточенная нагрузка в узлах и распределенная на стержни (см. рис. В.4). Устанавливаются опорные связи (см. рис. В.2). Выполняется полный расчет рамы (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А).

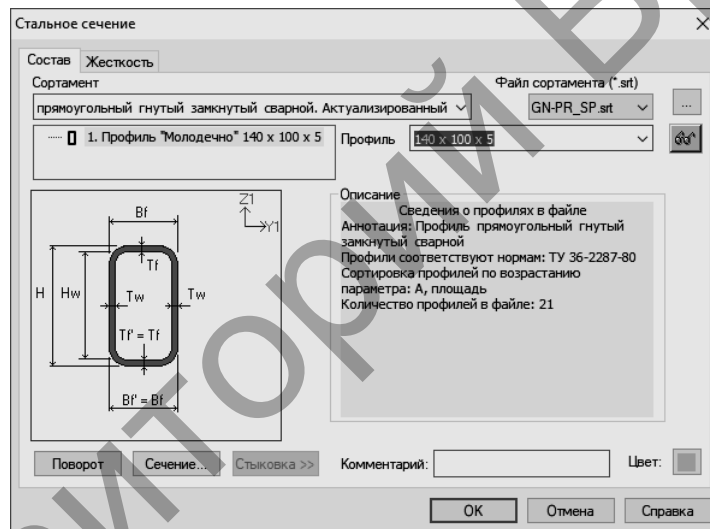


Рисунок В.1 Назначение элементам схемы тип жесткости

Задаем связи и шарниры для элементов схемы. Для узла 1, это заделка, ставим связи по всем возможным перемещениям, для узлов 8, 11, 14 связь только по оси z :

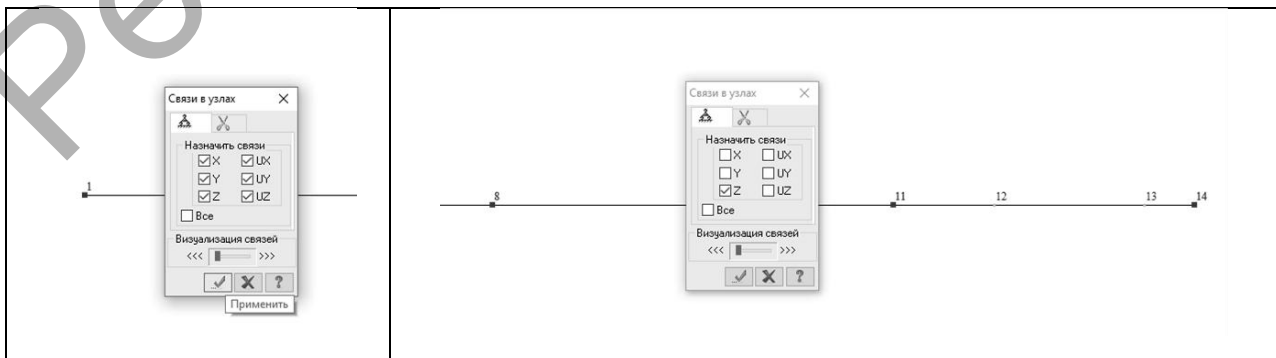


Рисунок В.2 Назначение связей в узлах

Для элементов, которые присоединяются к узлам шарнирно в начальном и (или) конечном узле, шарниры в ПК устанавливаются путем устранения угловых связей в местных системах координат, назначаем шарнир.

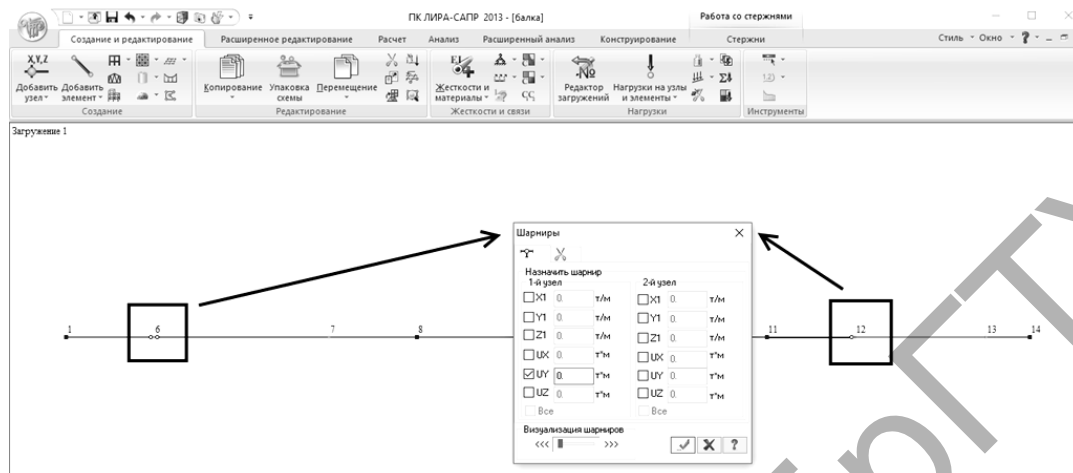
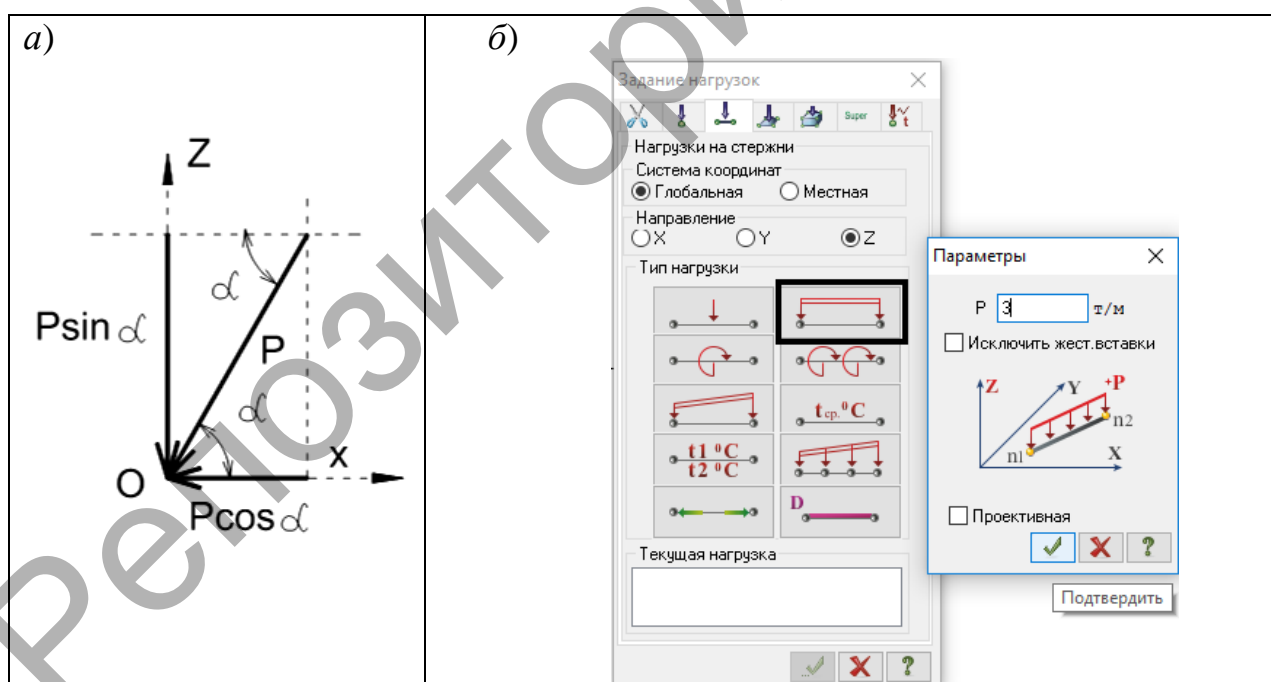


Рисунок В.3 Назначение шарниров для соответствующих узлов схемы

Для задания сосредоточенной силы в узле, которая расположена под заданным углом, необходимо её разложить на две составляющие по направлениям осей z и x , которые примут значения $P \sin \alpha$ и $P \cos \alpha$. Для задания распределенной нагрузки выбираем стержень и задаем нагрузку на стержень.



а) разложение силы, приложенной под углом на составляющие;
 б) задание распределенной нагрузки.

Рисунок В.4 – Задание нагрузки на балку

Выделяем все элементы схемы и делаем «Упаковку схемы», заходим на вкладку «Расчет» и нажимаем «Выполнить полный расчет».

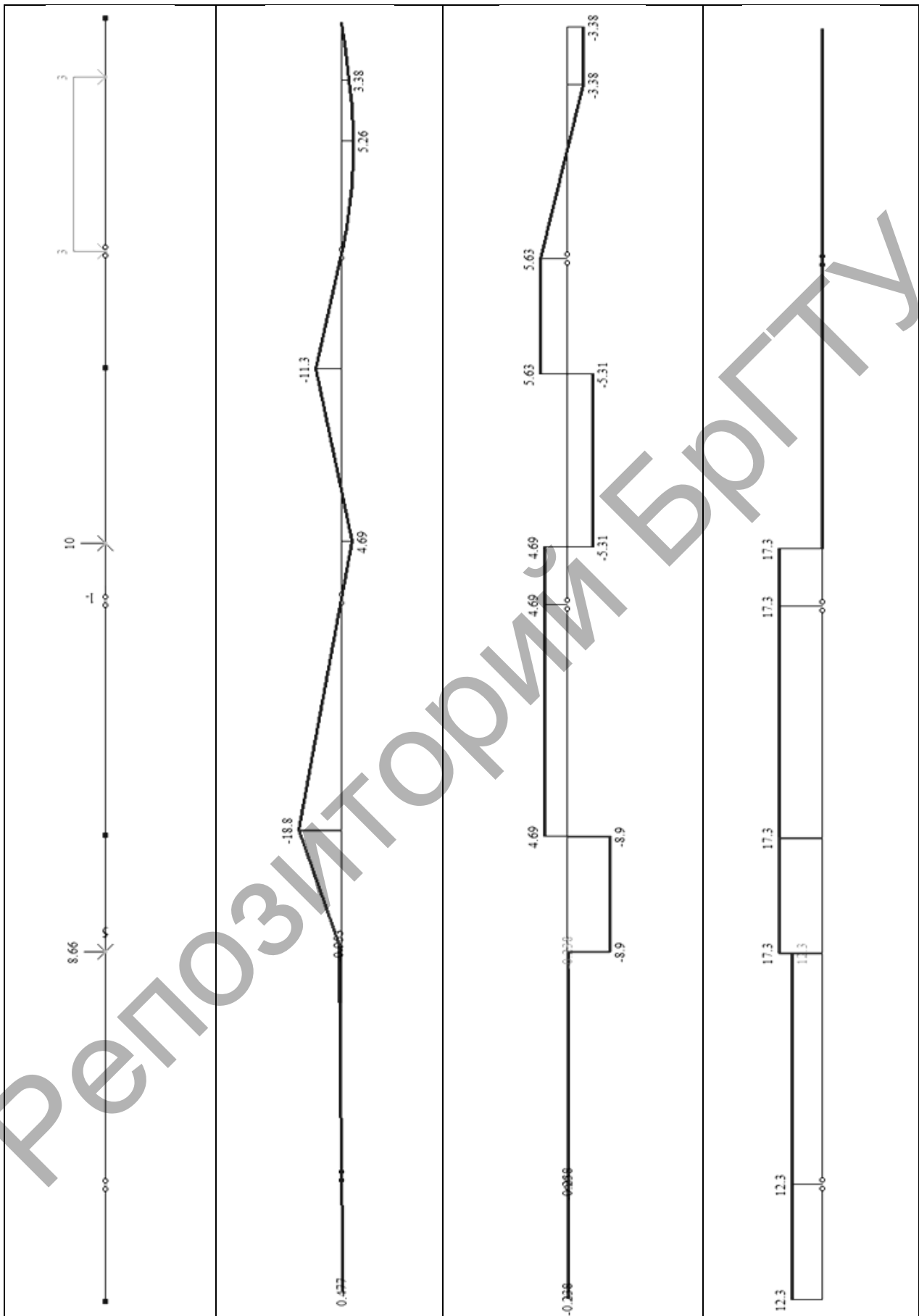


Рисунок В.5 Результаты расчета в ПК Лира, эпюры внутренних усилий M , Q , N

2. В программе Sirius

Можно выполнить проверку результатов в программе «Sirius», которая предназначена для решения только плоских задач, но быстро и достоверно дает нужный результат. Программа имеет интуитивно понятный удобный интерфейс. Ввод данных осуществляется графическим способом: вначале задаются узлы (координаты x, y) – жесткие или шарнирные; после этого соединяем узлы стержнями (при этом в программе стержень необходимо обязательно проводить из узла с меньшим номером к узлу с большим номером) (см. рис. В.6); жесткости стержней задаются в окне «Стержень». В необходимых точках устанавливаем опоры и задаем нагрузки на узлы и элементы; нажимаем «ОК» – расчетная схема сформирована. Теперь можем выполнить расчет системы, в данном случае многопролетной балки. Результаты расчета балки приведены ниже в виде эпюр усилий.

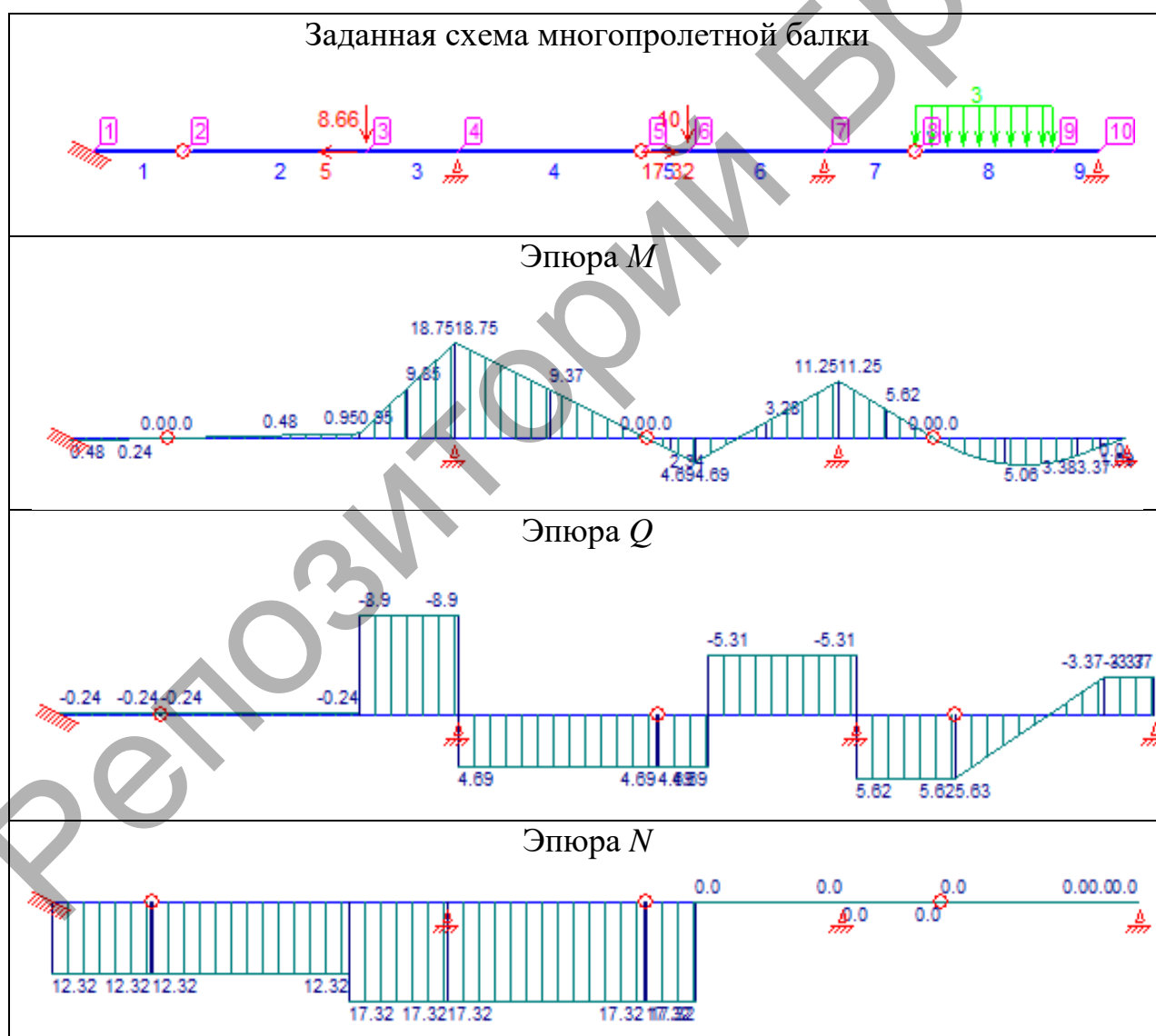


Рисунок В.6 Результаты расчета в программе Sirius, эпюры внутренних усилий M, Q, N

3. В программном комплексе SCAD

Создание нового проекта: выбирается признак схемы – «2-Плоская рама»: задаются узлы, создаются стержни – выбираются на вкладке «Добавить элемент» (может сразу задаваться жесткость элемента – см. рис. В.7), устанавливается примыкание стержней к узлам (жесткое либо шарнирное) (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А).

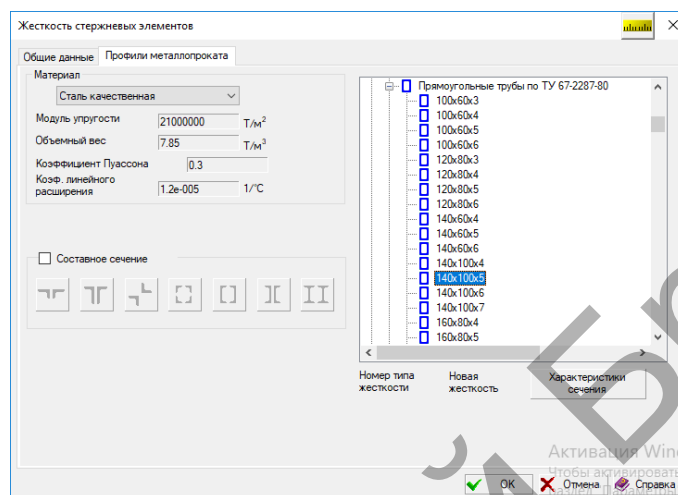


Рисунок В.7 Выбираем профиль металлопроката из выпадающего списка

Установка связей для опорных узлов: выделяются узлы и назначаются необходимые связи, выполняется подтверждение этой операции путем нажатия кнопки с «галочкой» (рис. В.8) – узлы приобретают зеленый цвет.

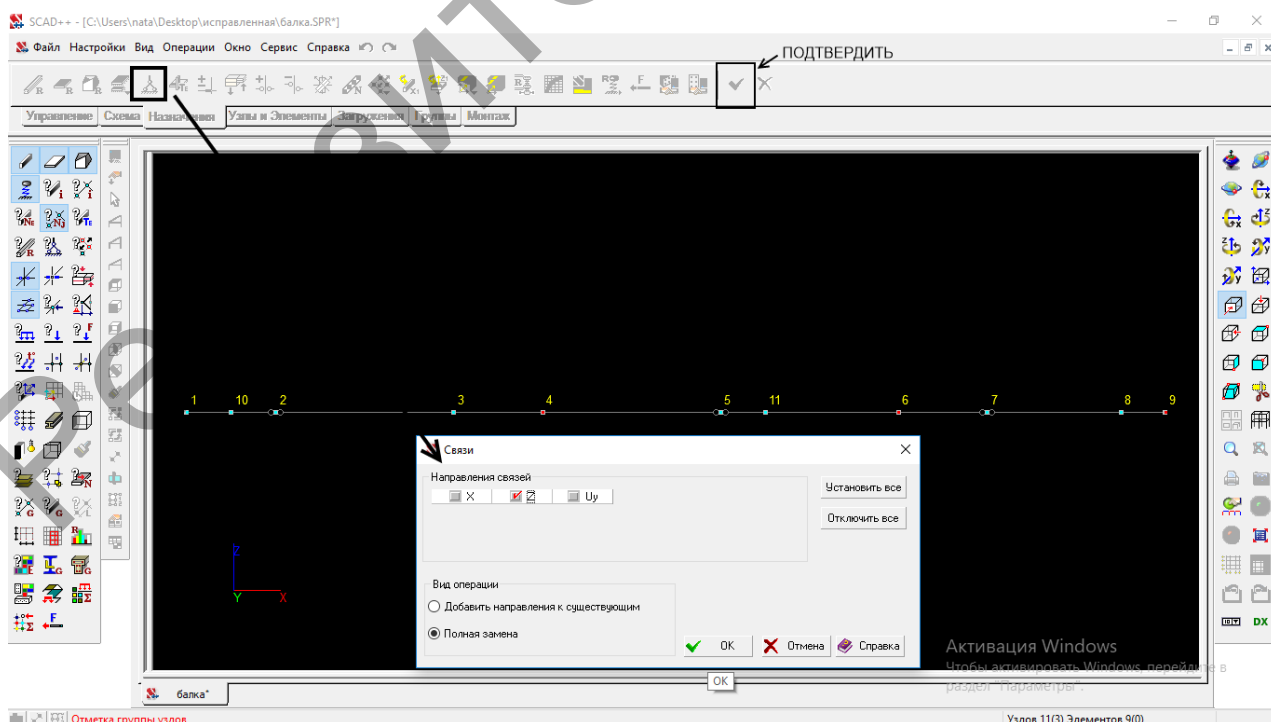


Рисунок В.8 Задание связи по оси z для опорных узлов

Задание узловой нагрузки: последовательно выделяются узлы, в которых прикладываются сосредоточенные силы, для них на вкладке «Загружение» выбирается «Ввод узловых нагрузок» и задаются нагрузки по осям x и z , после чего выполняется подтверждение операции.

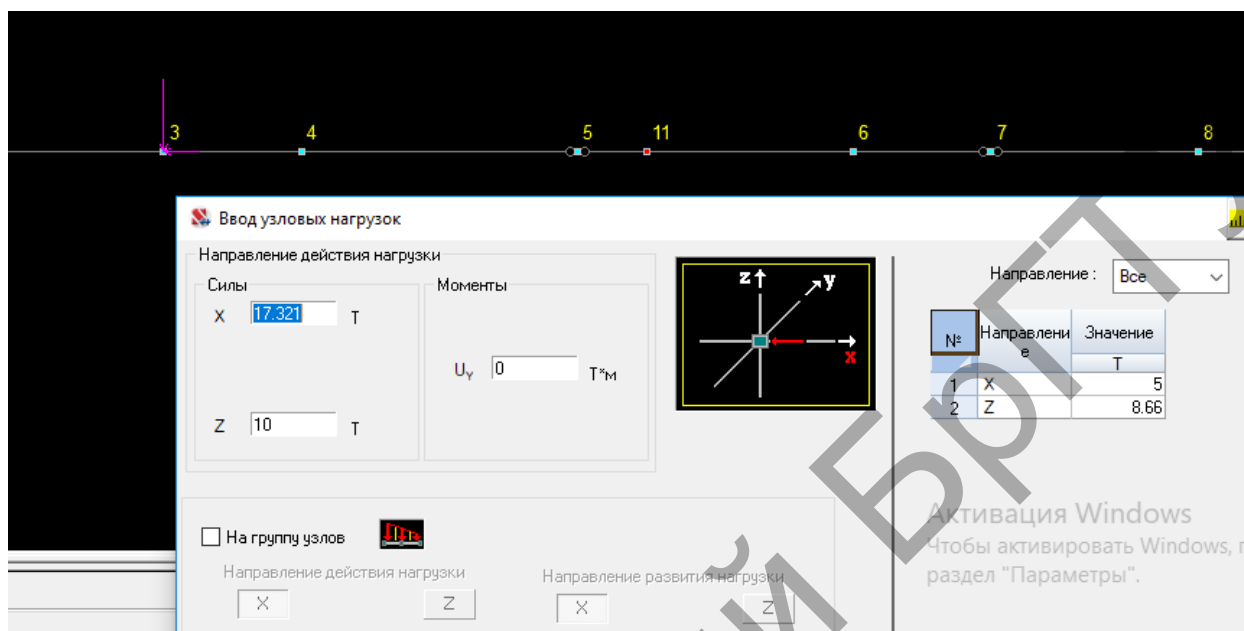


Рисунок В.9 Задание узловой нагрузки

Задание распределенной нагрузки: последовательно выделяются элементы, на вкладке «Загружение» активируется «Задание нагрузок на стержневые элементы» и выбирается вид нагрузки – «Распределенная» и задается значение нагрузки.

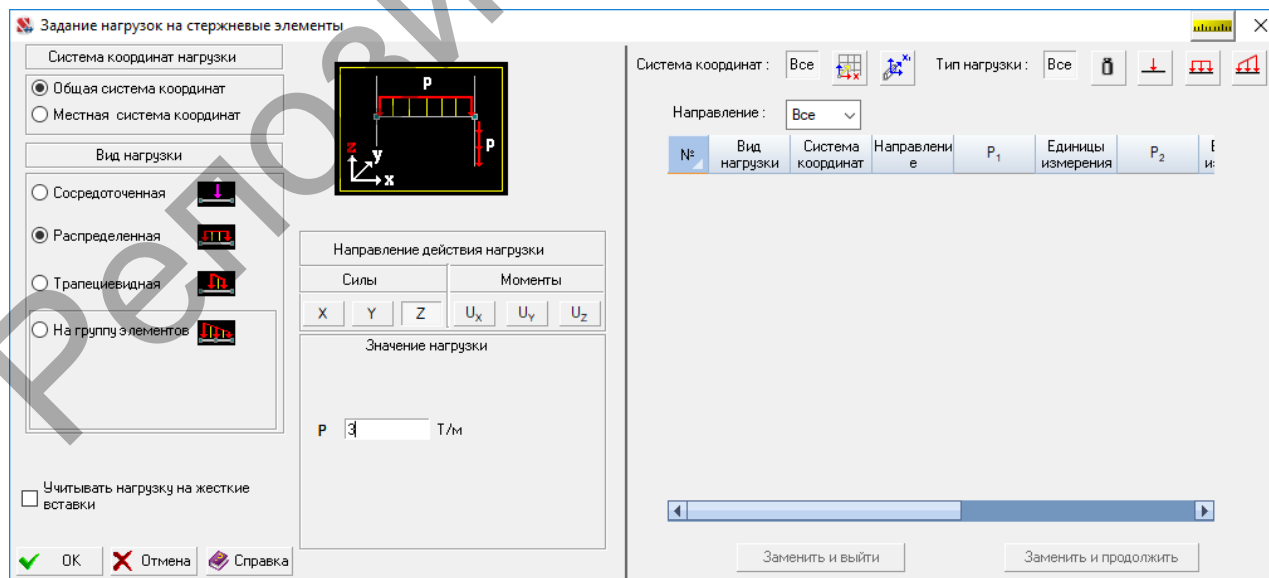


Рисунок В.10 Задание распределенной нагрузки на элемент

После создания расчетной схемы активируем вкладку «управление», сохраняем текущее загружение и можем уже выполнить линейный расчет.

Результаты расчета статически определимой многопролетной балки в программном комплексе SCAD представлены в виде эпюр внутренних усилий:

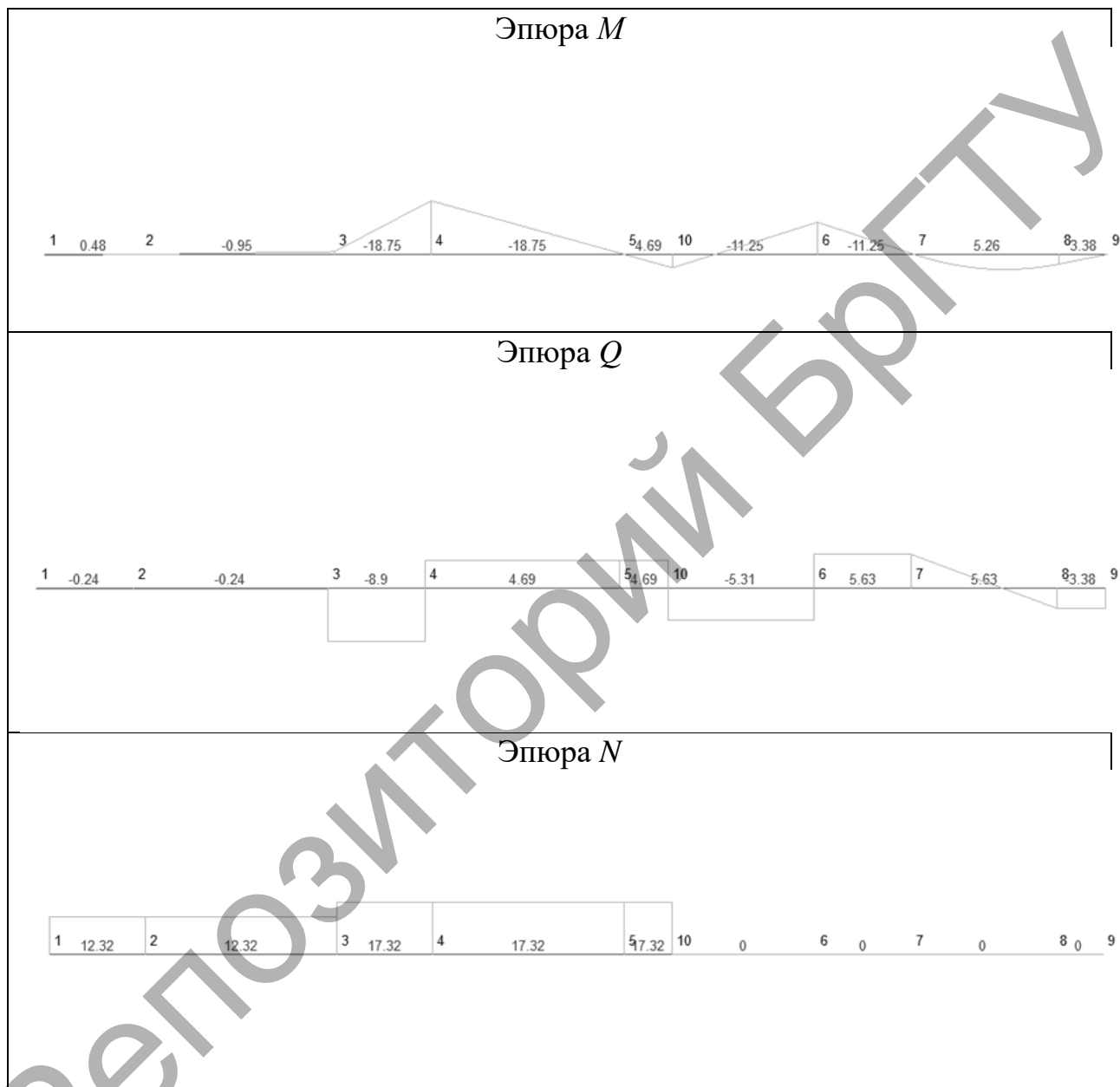


Рисунок В.11 Результаты расчета в SCAD, эпюры M , Q , N

Как видно из предыдущих расчетов, результаты во всех программных комплексах дают одинаковые значения, что говорит о достоверности решения данной задачи, независимо от выбранного вида решения, если точно и грамотно задать расчетную схему и загружение.

Верификация результатов расчета статически определимой рамы

1. В программном комплексе Лира

Создается новая расчетная схема – с признаком схемы 2 (три степени свободы в узле) и задается имя задачи, – например, «рама». Добавляются узлы по координатам в осях xOz , при этом следует учитывать, что узлы должны быть заданы и в тех точках, в которых имеются шарнирные соединения и приложены сосредоточенные силы и моменты. Задаются стержни путем последовательного соединения соответствующих узлов, после чего для этих стержней задаются жесткости элементов (например, прямоугольный гнутый замкнутый профиль «Молодечно» 180x180x5). Задаются сосредоточенная нагрузка в узлах и распределенная на стержни. Устанавливаются опорные связи. Выполняется полный расчет рамы (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А).

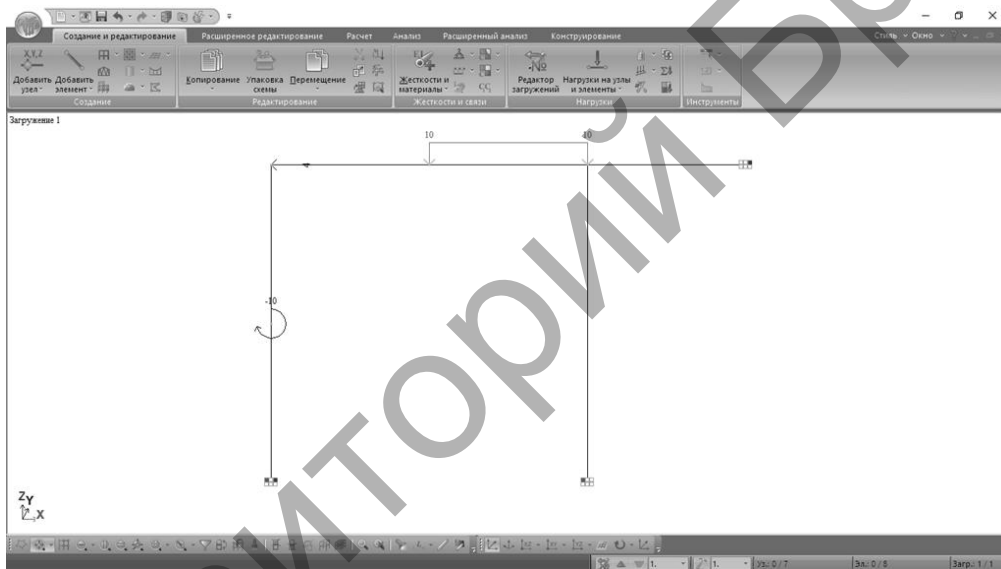


Рисунок С.1 Расчетная схема сформирована для расчета

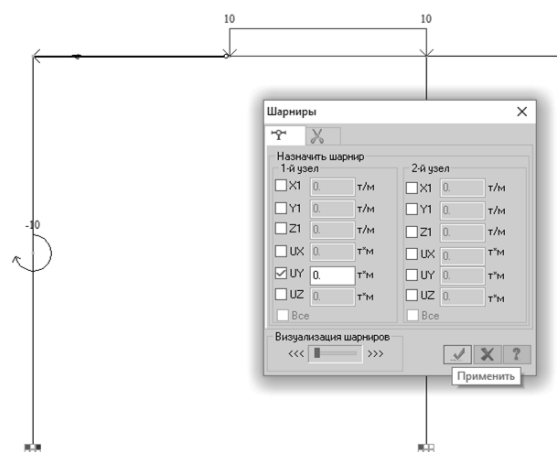


Рисунок С.2 Назначение шарниров для стержня 3, 4

На вкладке «Расчет» выполняем полный расчет рамы и на вкладке «Анализ» можем посмотреть эпюры внутренних усилий для заданной рамы:

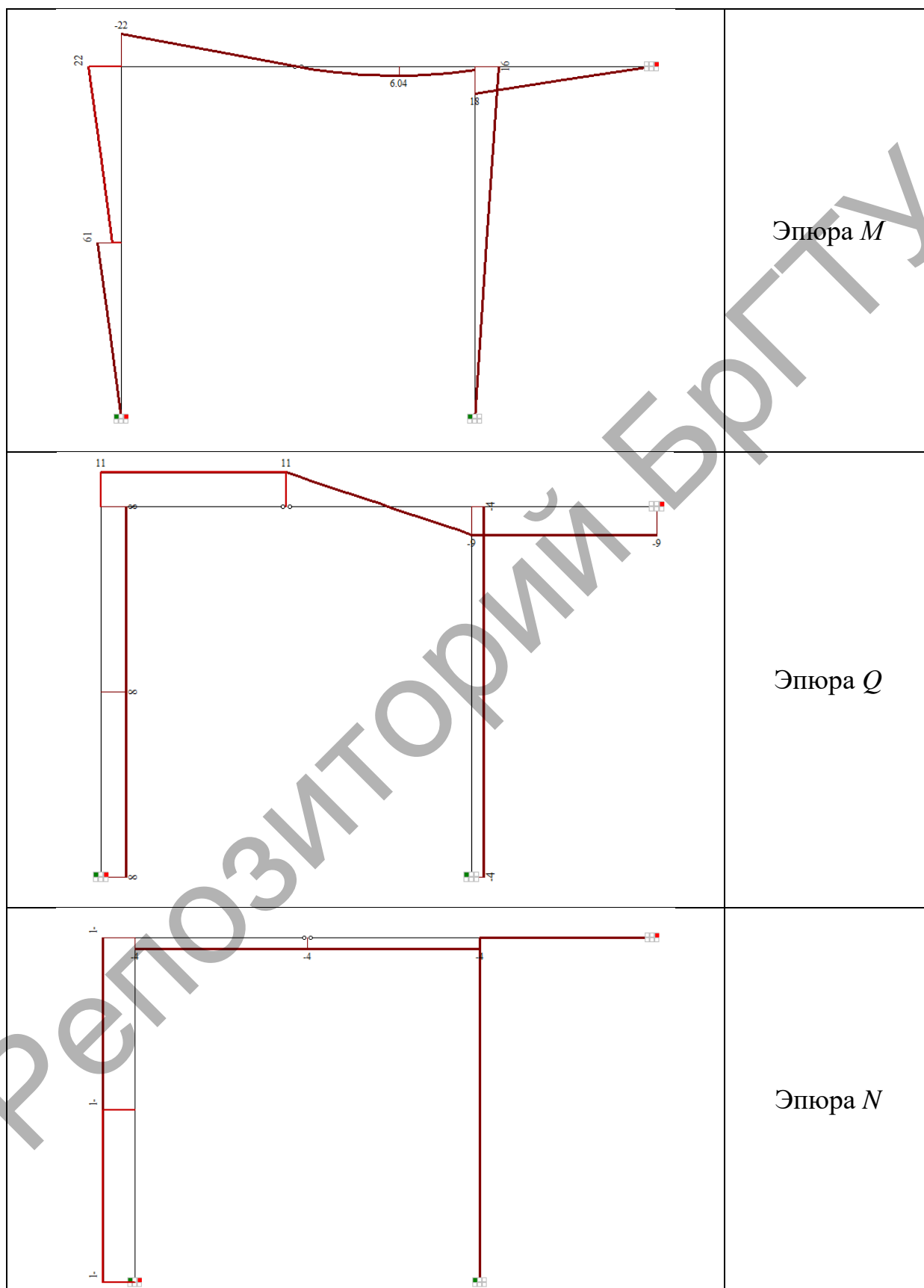


Рисунок С.3 Результаты расчета в ПК Лира, эпюры M , Q , N

Представим результат в виде интерактивной таблицы усилий, для проверки усилий по всем элементам рамы:

Таблица усилий (стержни)												
№ элем	№ сечен	Усилия								Тип элем	№ загруз	Составл
		N (т)	Mk (т*м)	My (т*м)	Qz (т)	Mz (т*м)	Qy (т)	Ry (т/м)	Rz (т/м)			
1	1	- 11.000	0.000	0.000	8.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-
1	2	- 11.000	0.000	16.000	8.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-
2	1	- 11.000	0.000	6.000	8.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-
2	2	- 11.000	0.000	22.000	8.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-
3	1	- 4.000	0.000	- 22.000	11.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-
3	2	- 4.000	0.000	0.000	11.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-
4	1	- 4.000	0.000	0.000	11.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-
4	2	- 4.000	0.000	2.000	- 9.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-
5	1	0.000	0.000	16.000	- 4.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-
5	2	0.000	0.000	0.000	- 4.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-
6	1	0.000	0.000	18.000	- 9.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-
6	2	0.000	0.000	0.000	- 9.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10	1	-

Рисунок С.4 Таблица усилий (стержни)

2. В программе Sirius

Выполняем ввод графическим способом по координатам узлов, после этого соединяем узлы с помощью стержней. Узлы соединяются мышкой, а жесткость задана по умолчанию, задаем нагрузку на узлы и элементы, указываем связи, нажимаем «ОК».

Расчет плоской стержневой системы - Рама1

Файл Опции Вид Ввод Данных Расчет Справка

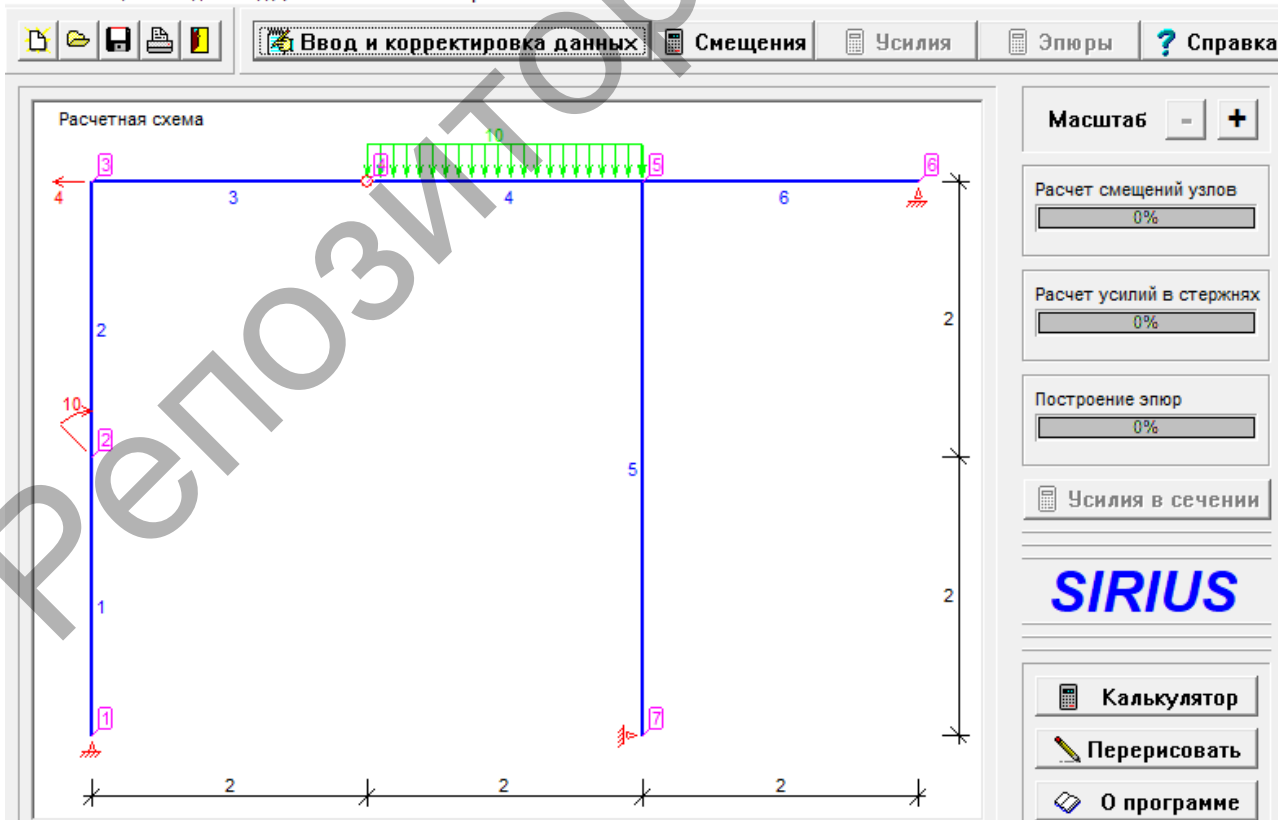


Рисунок С.5 Расчетная схема сформирована для расчета

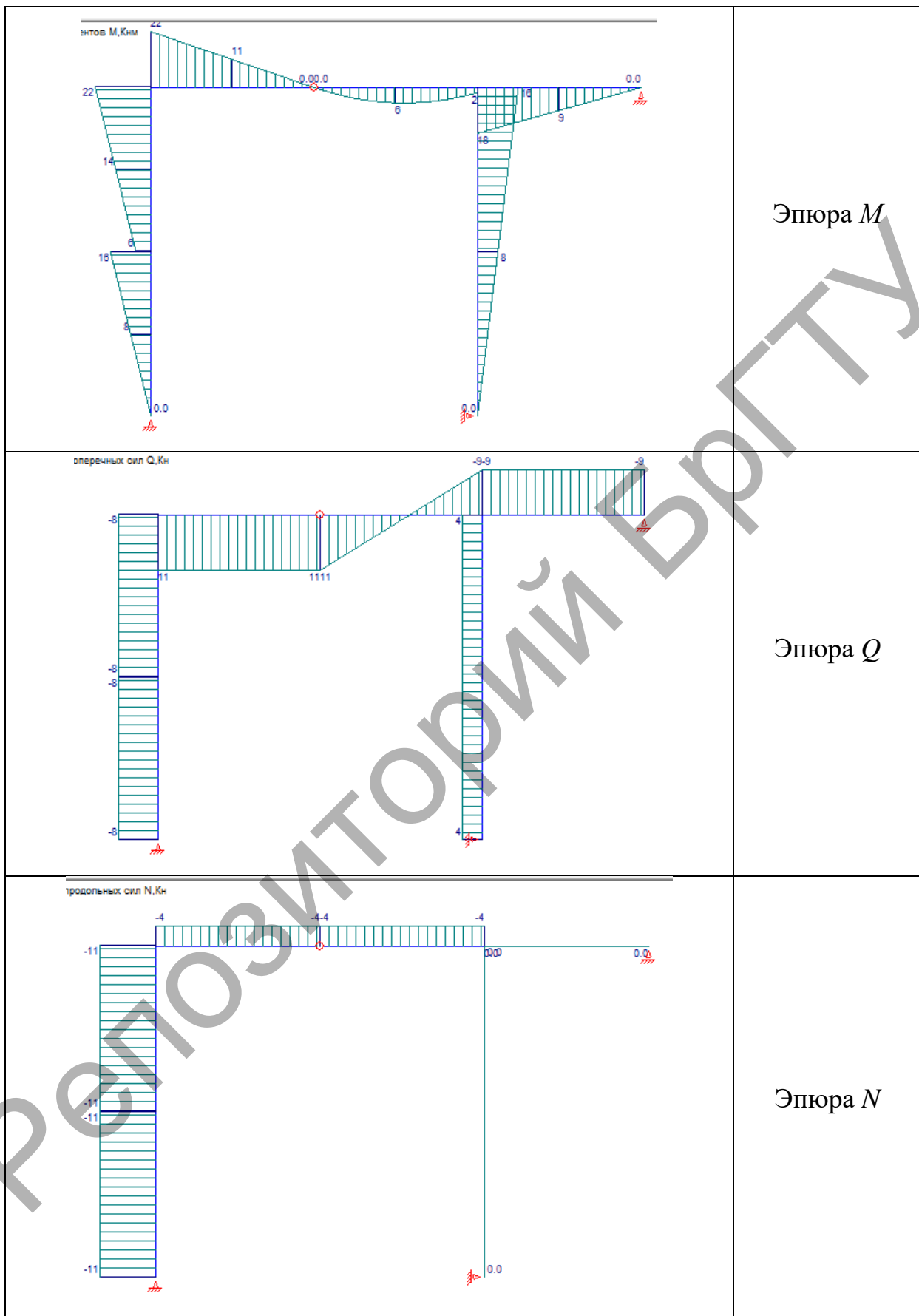


Рисунок С.6 Результаты расчета в Sirius , эпюры M , Q , N

3. В программном комплексе SCAD

Создаем новый проект с типом схемы: «2-Плоская рама». В управлении выбираем, расчетная схема, геометрия. После этого добавляем узлы, элементы, а на вкладке «Назначения» выполняем установку связей в опорных узлах и установку примыкания стержней (узел 4). Нагружаем расчетную схему сосредоточенной и распределенной нагрузкой, сохраняем текущее загружение и расчетная схема сформирована для расчета (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А).

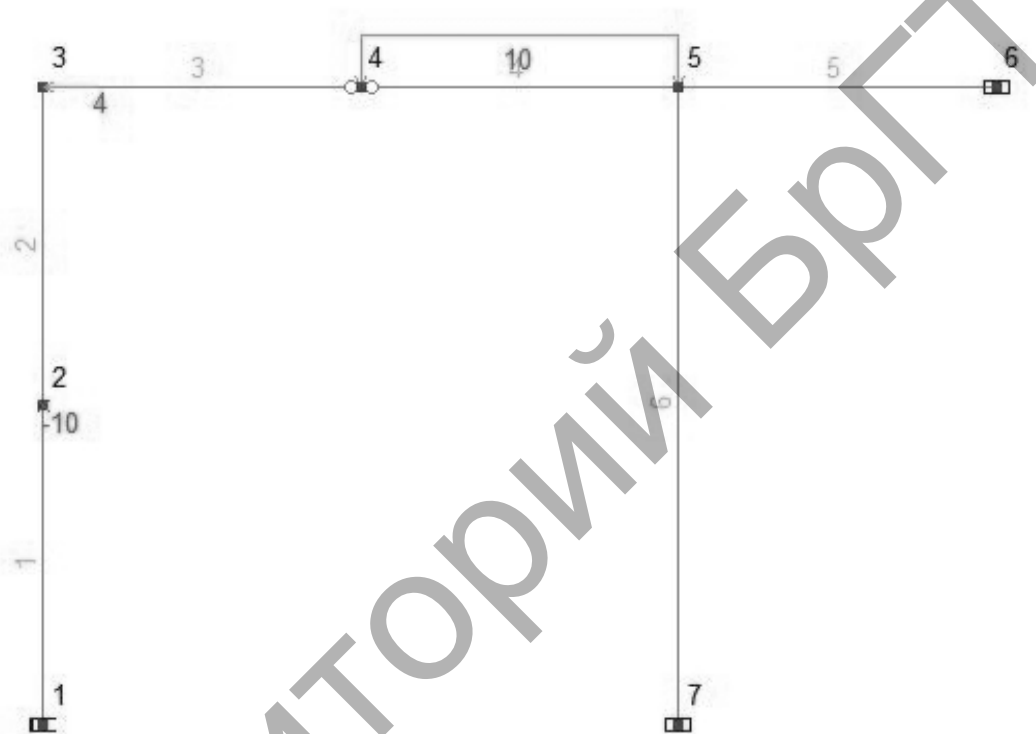


Рисунок С.7 Расчетная схема сформирована для расчета

Заходим на вкладку «Управление» и выполняем расчет «Линейный», после этого можем посмотреть результаты расчета в виде эпюр внутренних сил (рисунок С.8).

Результаты во всех программных комплексах дают одинаковые значения, что говорит о достоверности решения данной задачи, независимо от выбранного вида решения, если точно и грамотно задать расчетную схему и загружение.

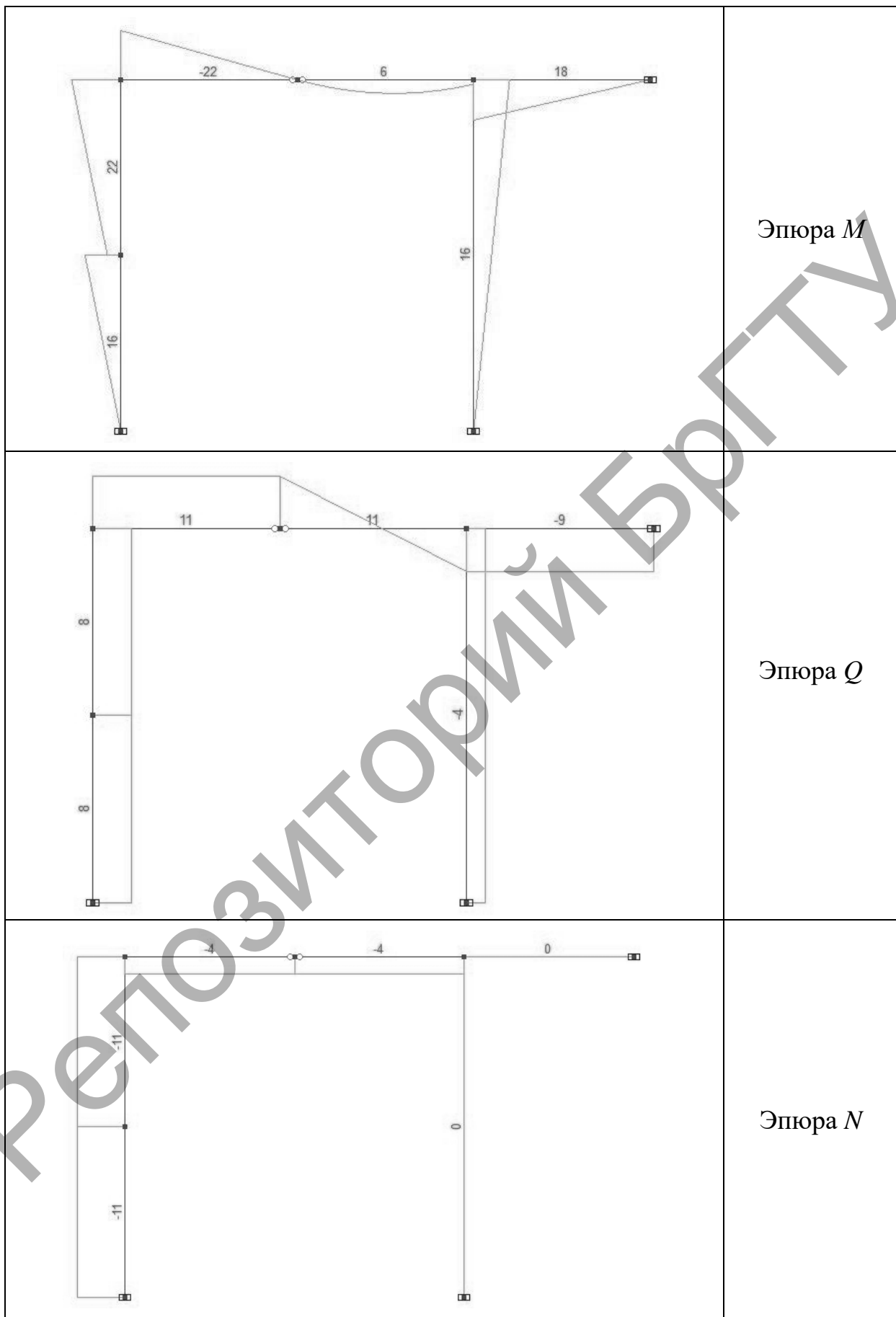


Рисунок С.8 Результаты расчета в SCAD , эпюры M , Q , N

Верификация результатов расчета в трехшарнирных арках

1. В программном комплексе Лиры

Создается новая расчетная схема с признаком схемы 2 (три степени свободы в узле) и имя задачи, например, «арка».

Добавляются узлы по координатам в осях xOz .

Задаются стержни путем последовательного соединения соответствующих узлов, после чего для этих стержней задаются жесткости элементов (например, «Труба бесшовная горячекатанная, 480x12» см. рис С.2.).

Задаются сосредоточенная нагрузка в узлах и распределенная на стержни, при этом при задании вертикальных распределенных нагрузок необходимо установить галочку «Проективная», чтобы распределенная нагрузка проецировалась на стержень с учетом угла наклона стержня в плоскости xOz .

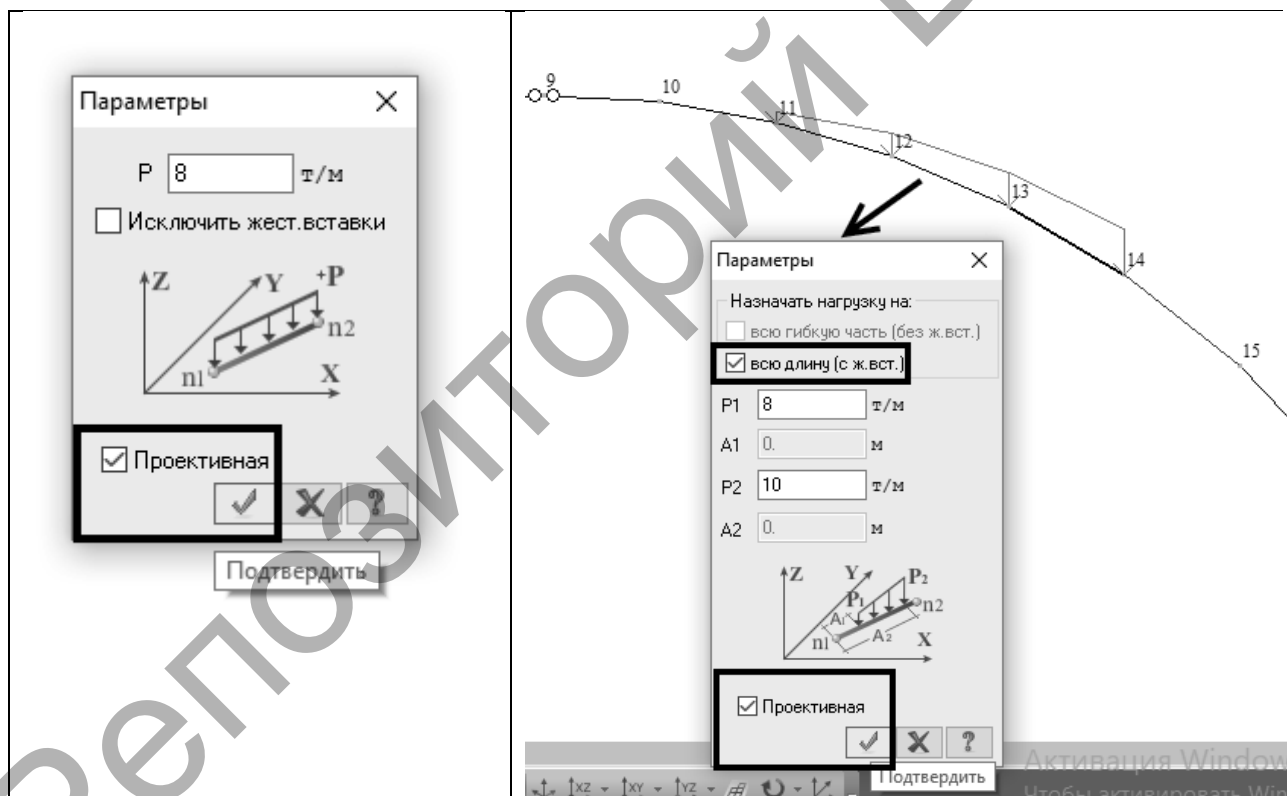


Рисунок С.1 Задаем распределенную нагрузку на элементы арки

Можно самостоятельно вычислить косинус угла наклона элемента по отношению к оси x и задать распределенную нагрузку на каждый стержень с учетом его угла наклона.

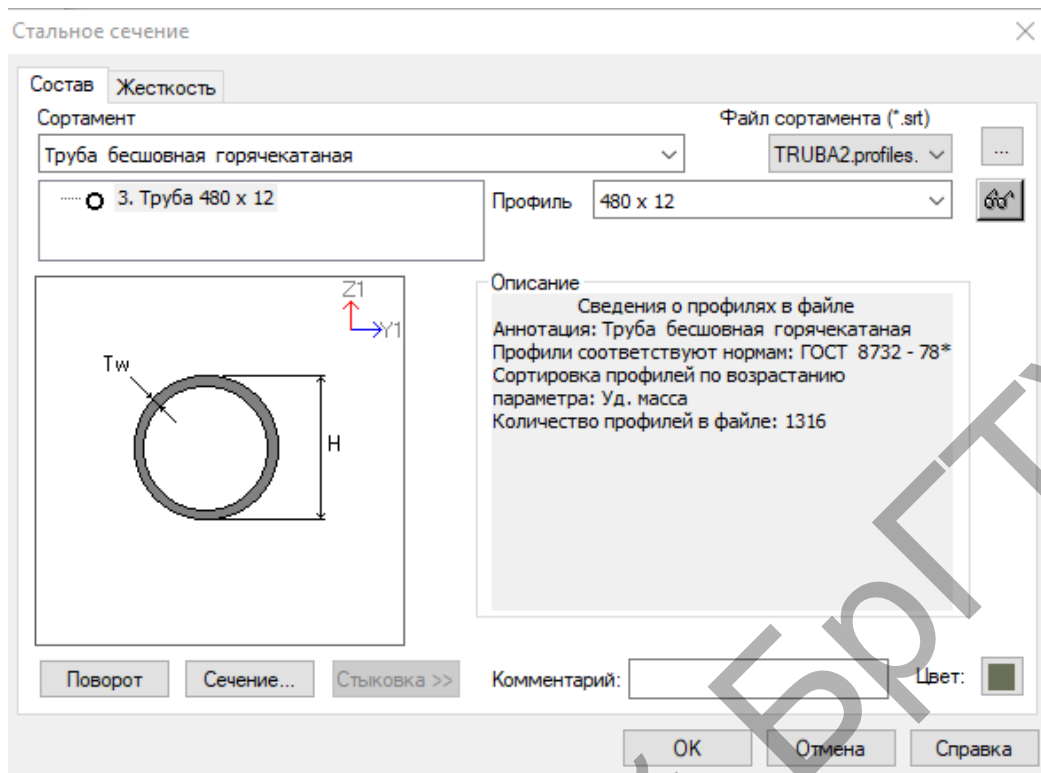


Рисунок С.2 Задаем жесткость элементов арки

Задается примыкание стержней в узле 9, который представляет собой шарнир и шарнирно-неподвижные опоры в узлах 1 и 17, выполняется упаковка схемы и расчетная схема сформирована для расчета. Выполняется полный расчет арки (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А).

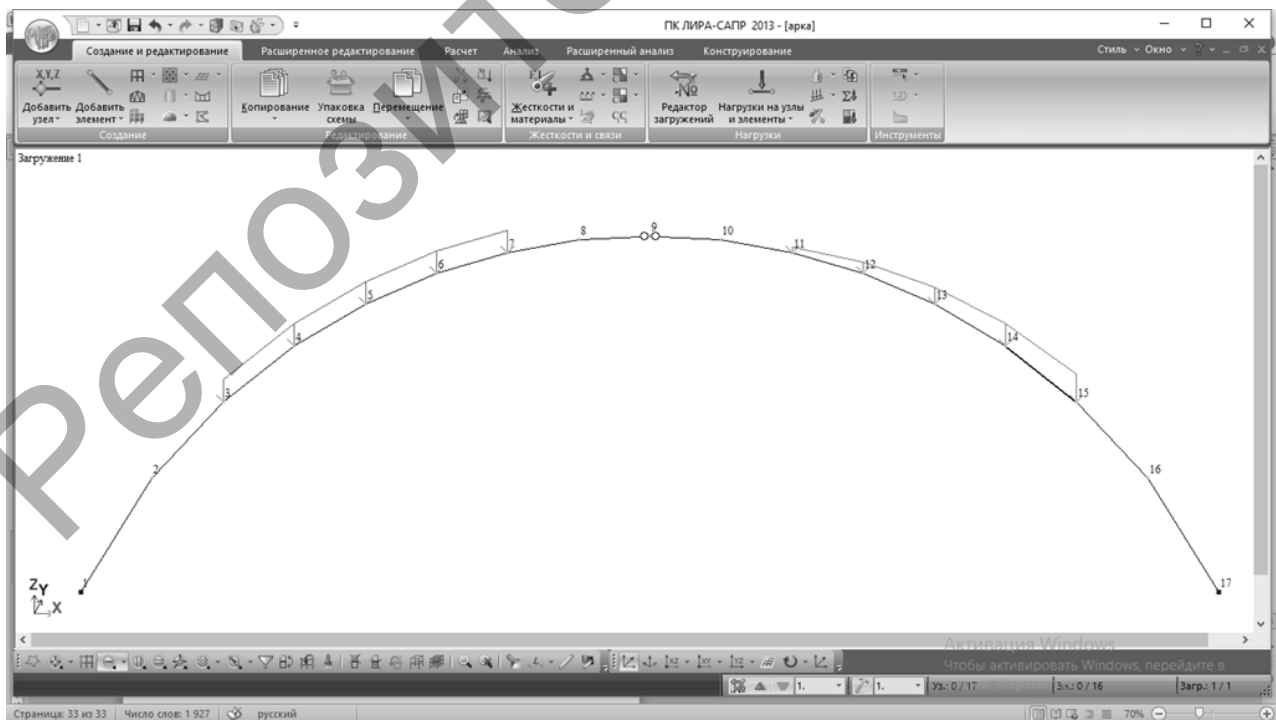


Рисунок С.3 Расчетная схема трехшарнирной арки в ПК Лири

Результаты расчета в ПК Лира представлены в виде эпюр внутренних усилий и табличном виде:

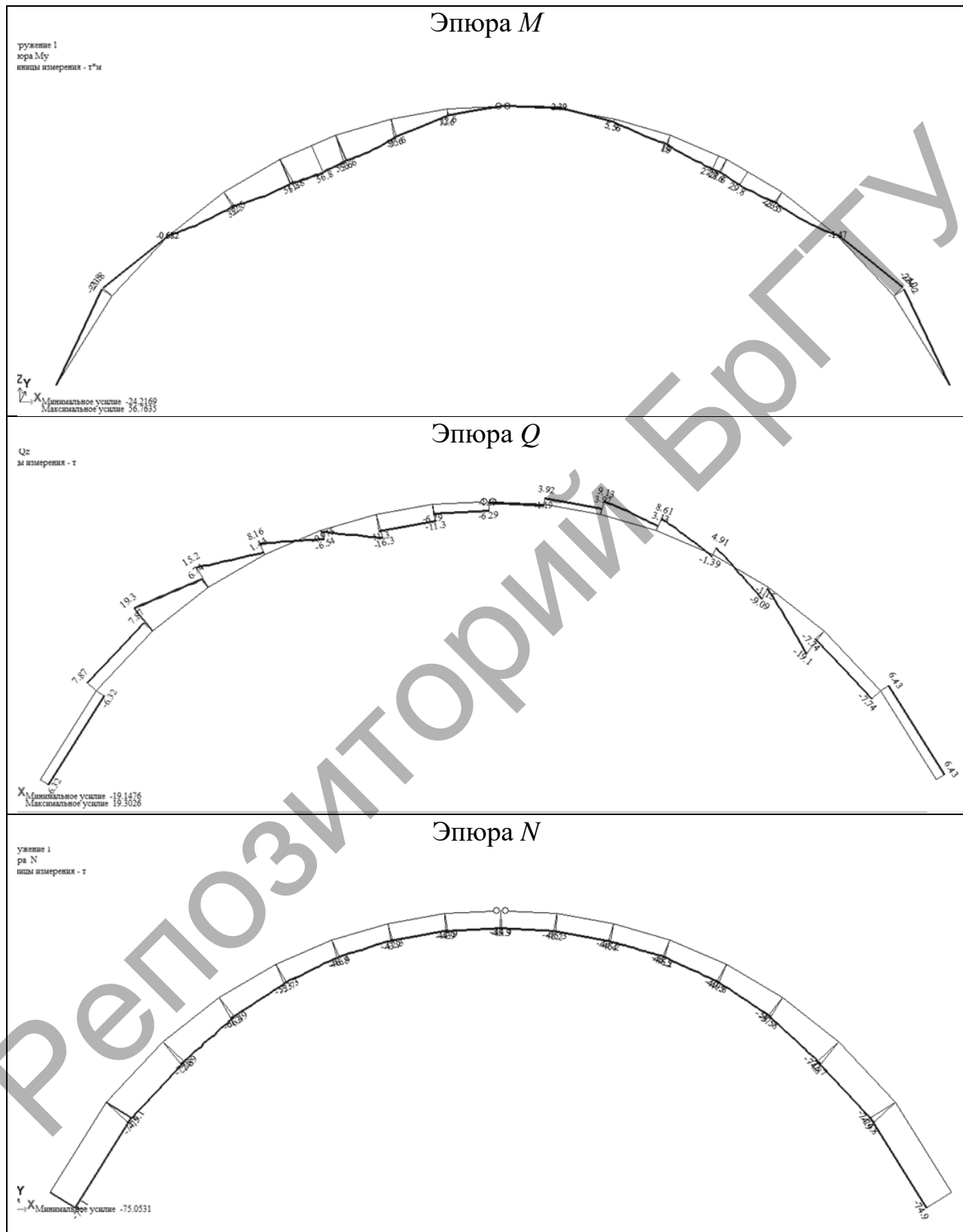


Рисунок С.4 Результаты расчета в ПК Лира, эпюры M , Q , N

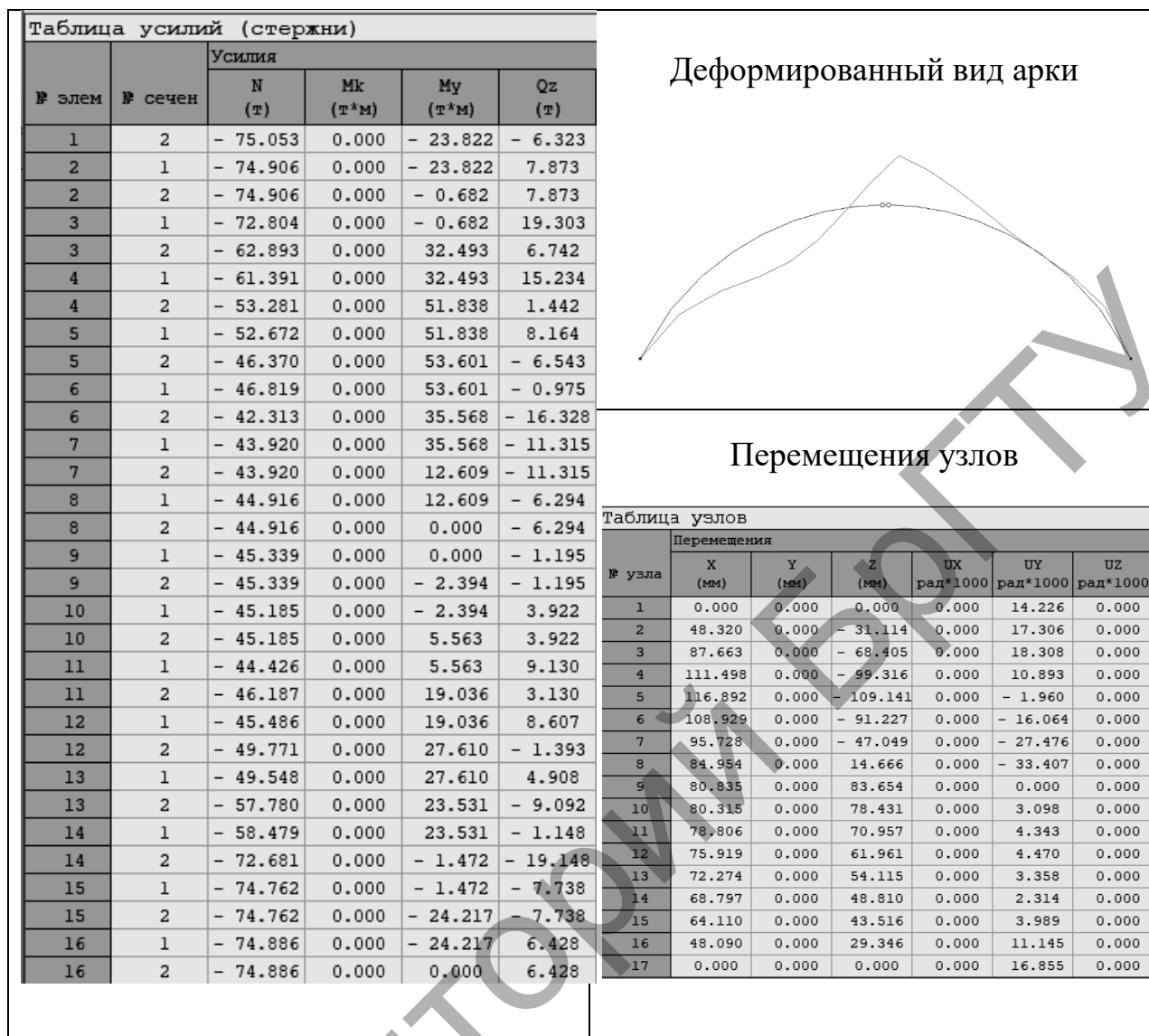


Рисунок С.5 Результаты расчета в ПК Ли́ра в табличной форме, деформированный вид арки и перемещение узлов

2. В программном комплексе SCAD

Создаем новый проект с типом схемы: «2-Плоская рама». В управлении выбираем, расчетная схема, геометрия. Затем добавляем узлы, элементы, а на вкладке «Назначения» выполняем установку связей в опорных узлах и установку примыкания стержней в местах шарниров (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А). Нагружаем расчетную схему сосредоточенной и распределенной нагрузкой, но при задании трапециевидной нагрузки нужно знать начальное и конечное значение в узле, а также необходимо преобразовать нагрузку – умножить на \cos угла наклона элемента для каждого элемента.

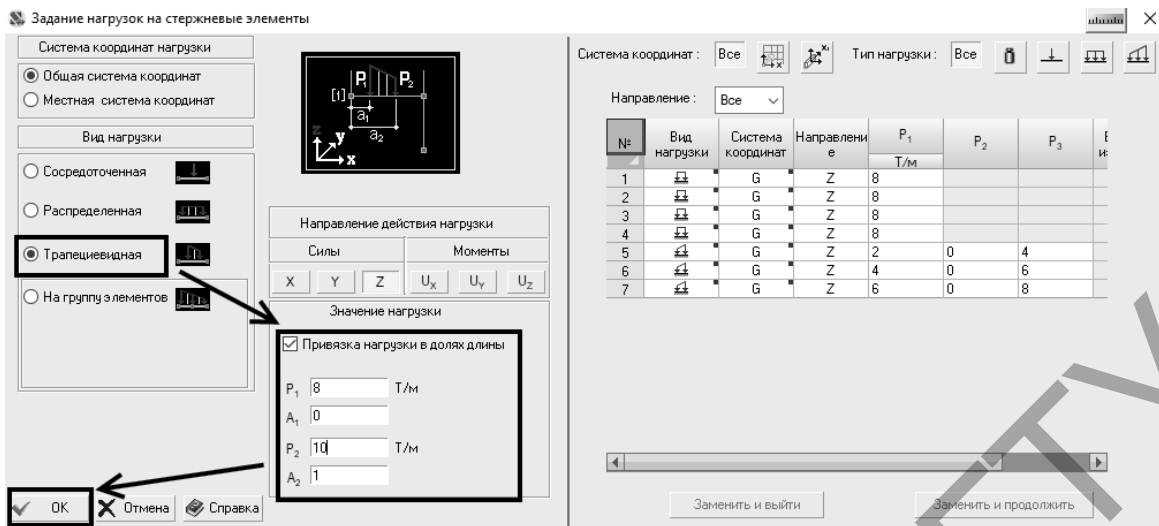


Рисунок С.6 Задание трапециевидной нагрузки на элемент арки

Расчетная схема сформирована для расчета, выбираем вкладку «Управление», сохраняем текущее загружение и выполняем линейный расчет.

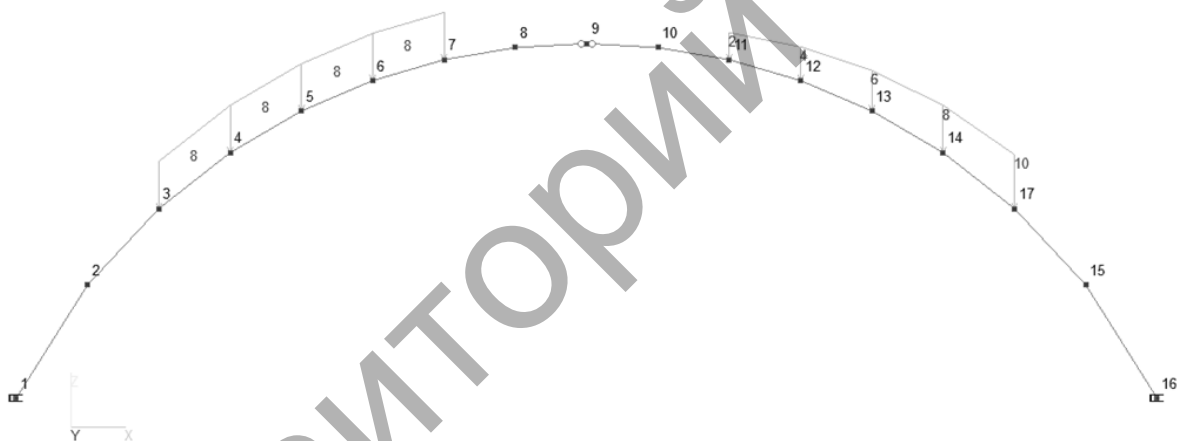
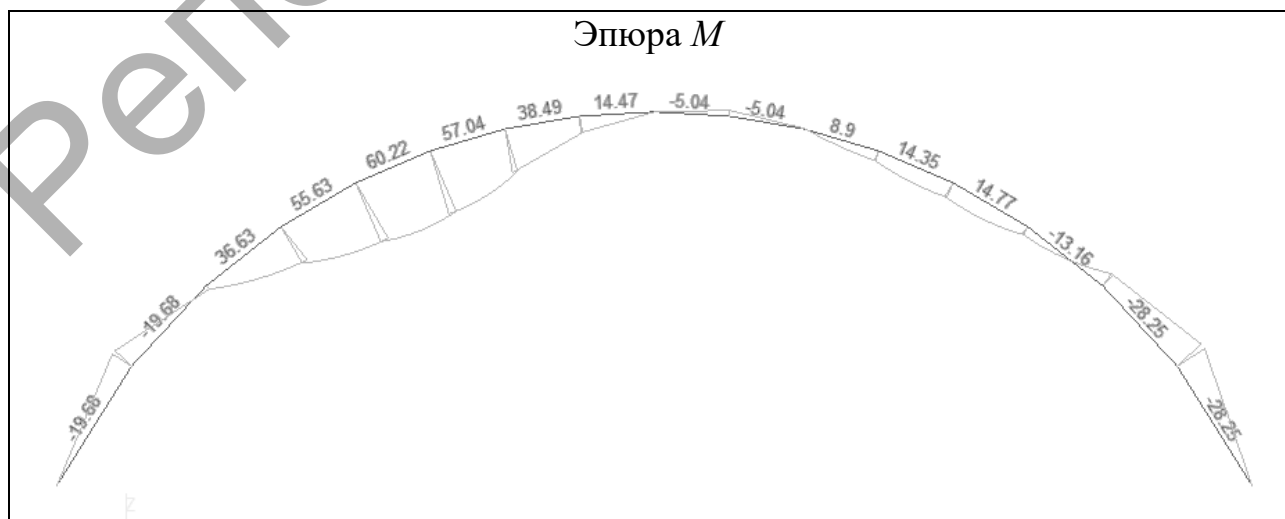


Рисунок С.7 Расчетная схема трехшарнирной арки в SCAD

Результаты расчета представим в виде эпюр внутренних сил M , Q , N .



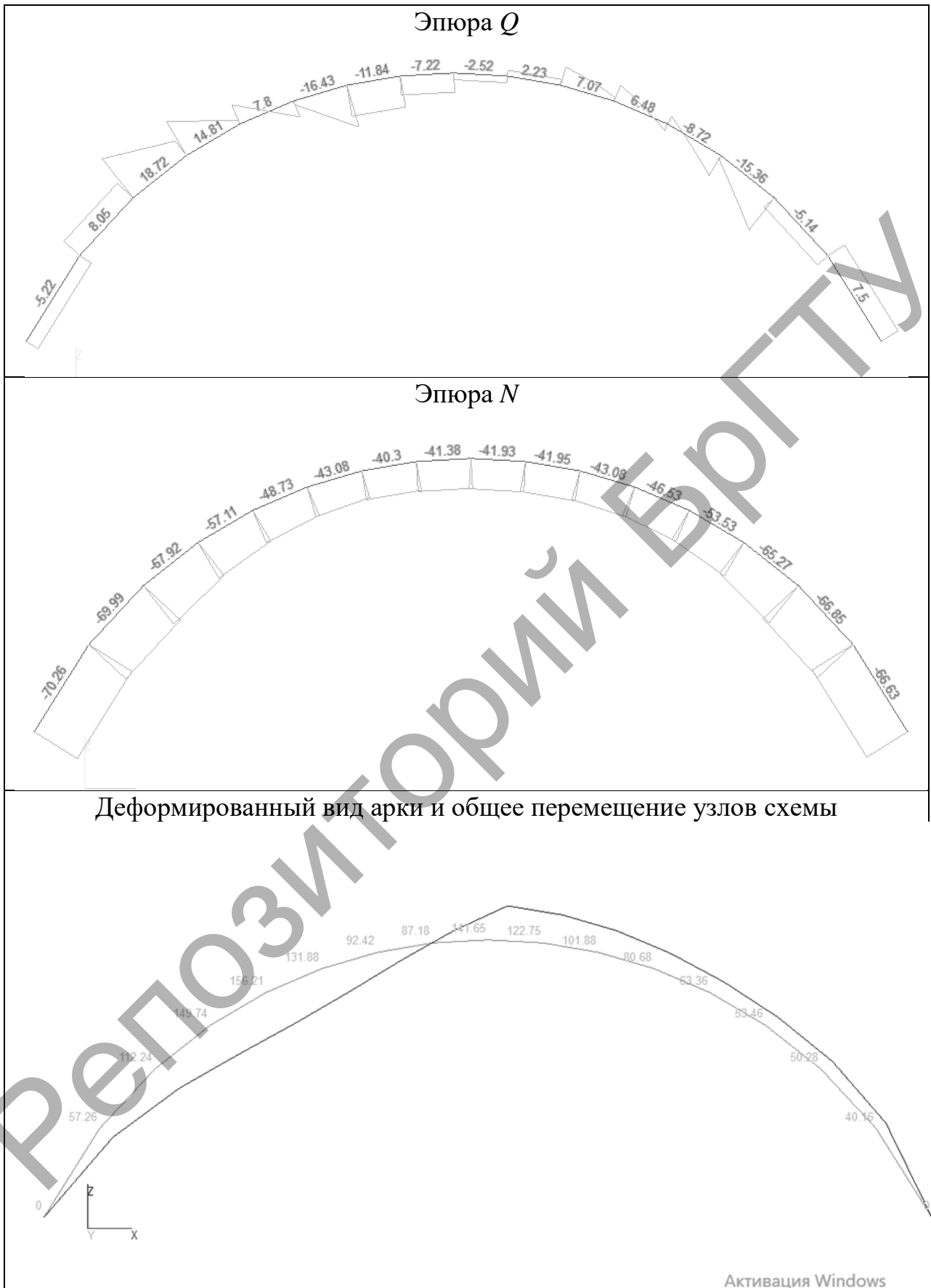


Рисунок С.8 – Результаты расчета в SCAD , эпюры M , Q , N , перемещения узлов

3. В программе Arka3

Задаем размеры арки, загрузку, вид арки и нажимаем на расчет, если значения усилий в контрольных сечениях найдены верно, то сразу получаем результат в виде эпюр внутренних усилий и в табличном виде (рис. С.12, С.13):

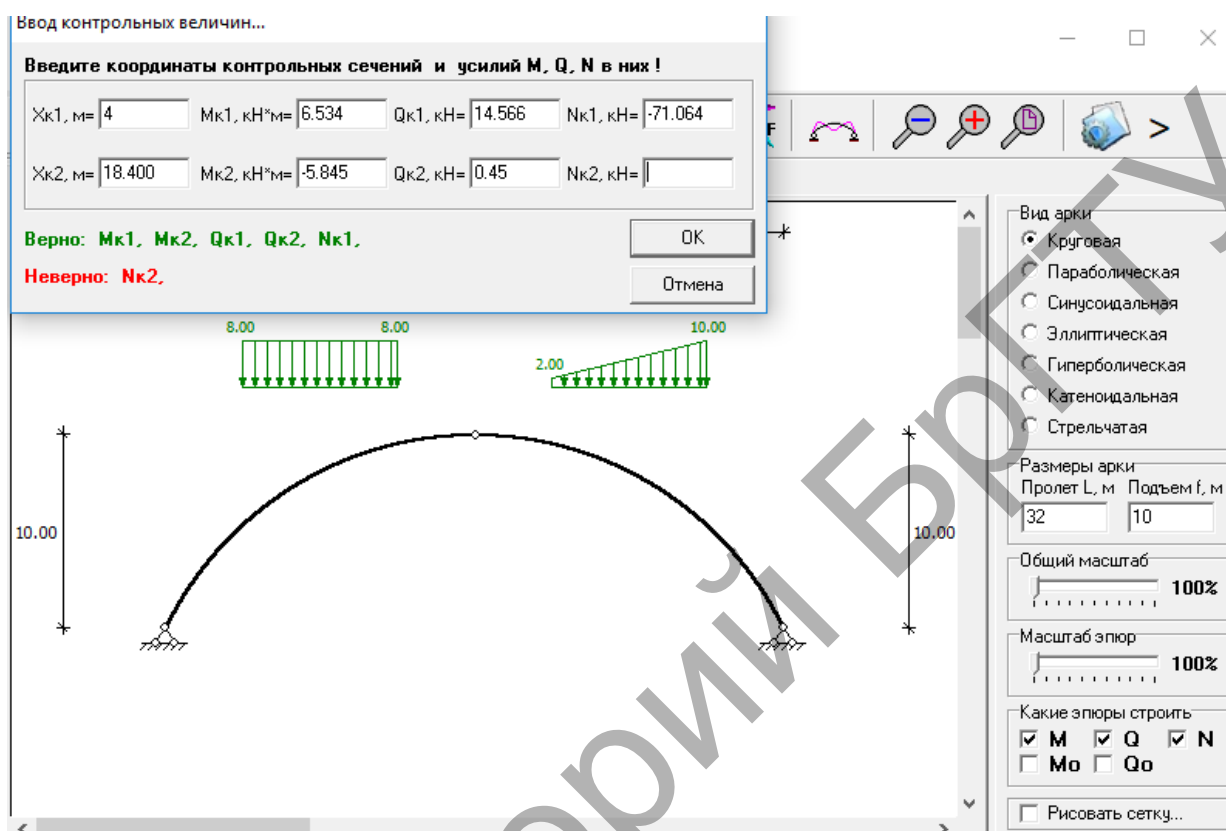


Рисунок С.9 – Ввод исходных данных и значений усилий в контрольное сечение в программе Arka3

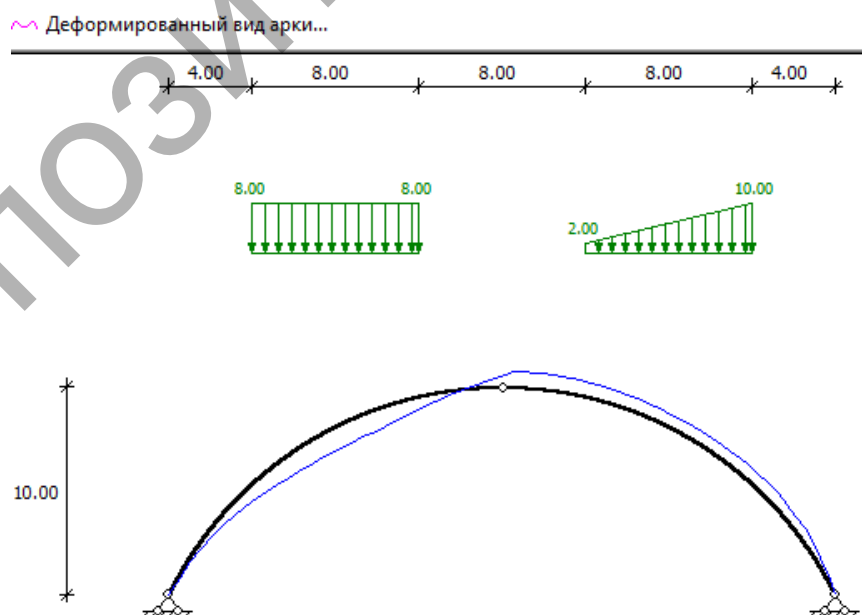


Рисунок С.10 – Деформированный вид арки

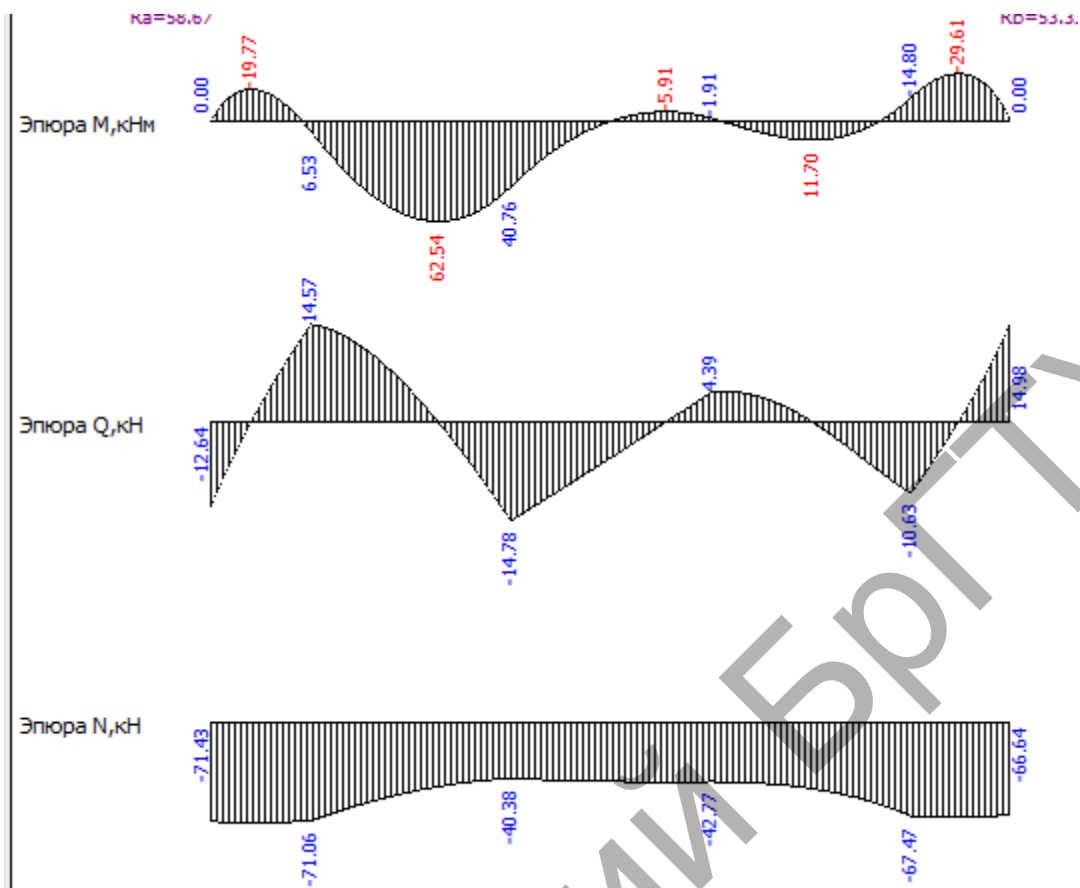


Рисунок С.12 – Эпюры внутренних усилий M , Q , N в Арка3

Arka3 - [Проект1.ark]
 Файл Нагрузки Действия Масштаб Опции Справка

Графика Результаты

X, м	Y, м	sin(φ)	cos(φ)	M, кН*м	Q, кН	N, кН
0.0000	0.0000	0.8939	0.4382	0.0000	-12.6442	-71.4307
2.0000	3.1927	0.7865	0.6176	-18.8896	2.6727	-72.4919
4.0000	5.3469	0.6742	0.7386	6.5339	14.5664	-71.0636
6.0000	6.9255	0.5618	0.8273	40.5125	11.3270	-59.2671
8.0000	8.1009	0.4494	0.8933	59.6931	4.6456	-50.0996
10.0000	8.9583	0.3371	0.9415	60.4467	-4.3396	-43.7652
12.0000	9.5447	0.2247	0.9744	40.7578	-14.7849	-40.3769
14.0000	9.8873	0.1124	0.9937	15.4759	-10.0936	-41.7972
16.0000	10.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-5.3333	-42.6667
18.0000	9.8873	-0.1124	0.9937	-5.8574	-0.5056	-42.9957
20.0000	9.5447	-0.2247	0.9744	-1.9089	4.3911	-42.7739
22.0000	8.9583	-0.3371	0.9415	7.1133	3.7120	-43.9899
24.0000	8.1009	-0.4494	0.8933	11.6931	0.1187	-47.7026
26.0000	6.9255	-0.5618	0.8273	5.8458	-5.2603	-55.1472
28.0000	5.3469	-0.6742	0.7386	-14.7995	-10.6273	-67.4681
30.0000	3.1927	-0.7865	0.6176	-29.5563	0.6210	-68.2972
32.0000	0.0000	-0.8989	0.4382	-0.0000	14.9813	-66.6367
Характерные сечения						
4.0000	5.3469	0.6742	0.7386	6.5339	14.5664	-71.0636
12.0000	9.5447	0.2247	0.9744	40.7578	-14.7849	-40.3769
20.0000	9.5447	-0.2247	0.9744	-1.9089	4.3911	-42.7739
28.0000	5.3469	-0.6742	0.7386	-14.7995	-10.6273	-67.4681
Экстремальные значения эпюры M						
1.6000	2.6633	0.8090	0.5878	-19.7661	0.0000	-72.5412
9.0800	8.5998	0.3888	0.9213	62.5427	0.0000	-46.3185
18.2000	9.8635	-0.1236	0.9923	-5.9103	0.0000	-42.9987
24.0500	8.0757	-0.4522	0.8919	11.6964	0.0000	-47.8383
29.8900	3.3314	-0.7803	0.6254	-29.6061	0.0000	-68.3000

Рисунок С.13 – Результаты расчета в табличном виде в Арка3

4. В программе SdCAD

Задаем узлы по координатам на вкладке «Редактирование узлов», соединяем стержнями «Редактирование стержней», а также выполняем примыкание стержней шарнирное в узле 10, задаем каждому элементу определенную жесткость и ставим опоры в узлы 1, 2 на вкладке «Редактирование опор». Задаем распределенную нагрузку на вкладке «Распределенная нагрузка» – глобальная по оси y , нагрузку преобразуем с учетом угла наклона элемента. После этого нажимаем на кнопку «Расчет», результаты представлены в виде эпюр усилий и таблиц.

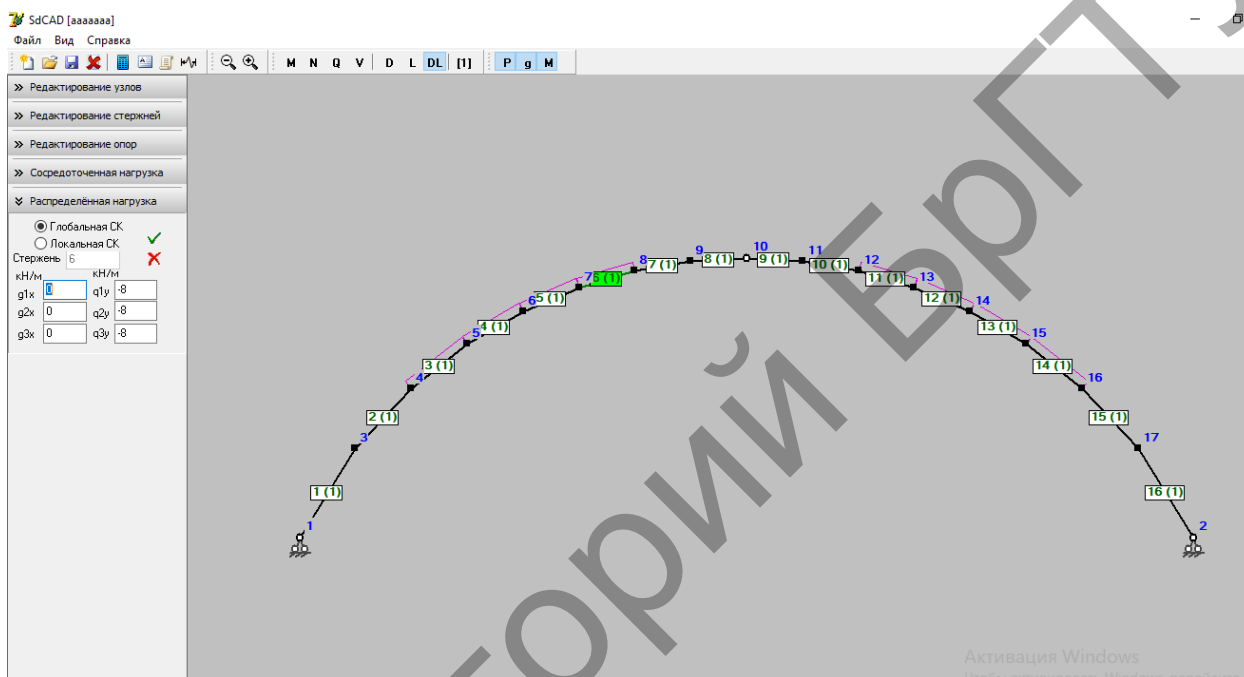


Рисунок С.14 – Задание расчетной схемы

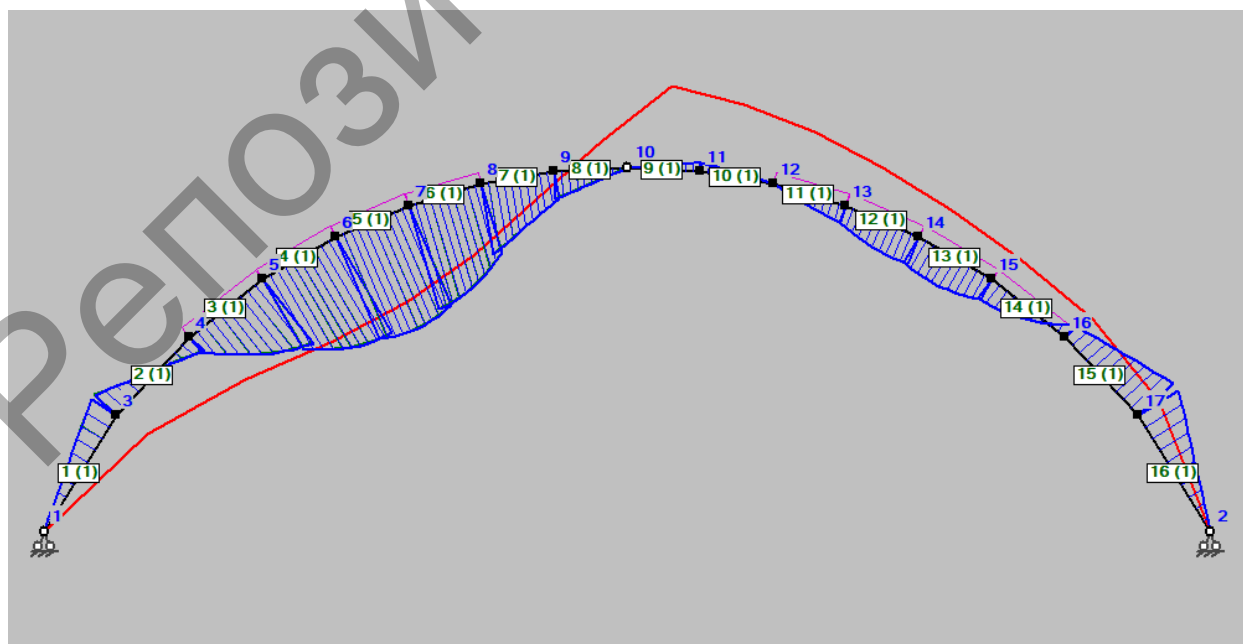


Рисунок С.15 – Эпюра M , деформированный вид арки

Значения усилий изгибающих моментов для сопоставления полученных результатов представлены в табличной форме .

Таблица С.1 – Сравнение результатов в Арка3, ПК Лира, SCAD, SdCAD

№ точки (сечения)	Изгибающий момент			
	Арка3	Ли́ра	SCAD	SdCAD
0	0	0	0	
1	-18,89	-17,5	-19,68	-17,02
2	6,534	7,15	7,9	7,94
3	40,513	40,2	36,63	41,8
4	59,693	59,1	55,63	59,65
5	60,447	60,1	60,22	60,86
6	40,758	40,8	44,42	41,37
7	15,476	15,7	14,47	16,06
8	0	0	0	0
9	-5,857	-6,55	-5,8	-6,82
10	-1,909	-3,81	-0,56	-4,39
11	7,113	3,79	8,9	2,85
12	11,693	7,31	14,35	5,96
13	5,846	1,75	14,77	0,46
14	-14,79	-16,8	-13,16	-17,54
15	-29,556	-29,5	-28,25	-29,81
16	0	0	0	0

Сравнивая результаты расчета, полученные в ПК Лира, SCAD, SdCAD с аналитическим решением в программе Арка3, видим, что результаты отличаются. Здесь это может быть связано с различными подходами к дискретизации задачи и задания распределенных нагрузок (в ПК Лира нагрузка задается как проективная в каждом конкретном элементе; в ПК SCAD, SdCAD – с учетом угла наклона).

Верификация результатов расчета в двухшарнирных арках

1. В программе Arka2:

Расчетная схема формируется аналогично, как и в ПРИЛОЖЕНИИ D.

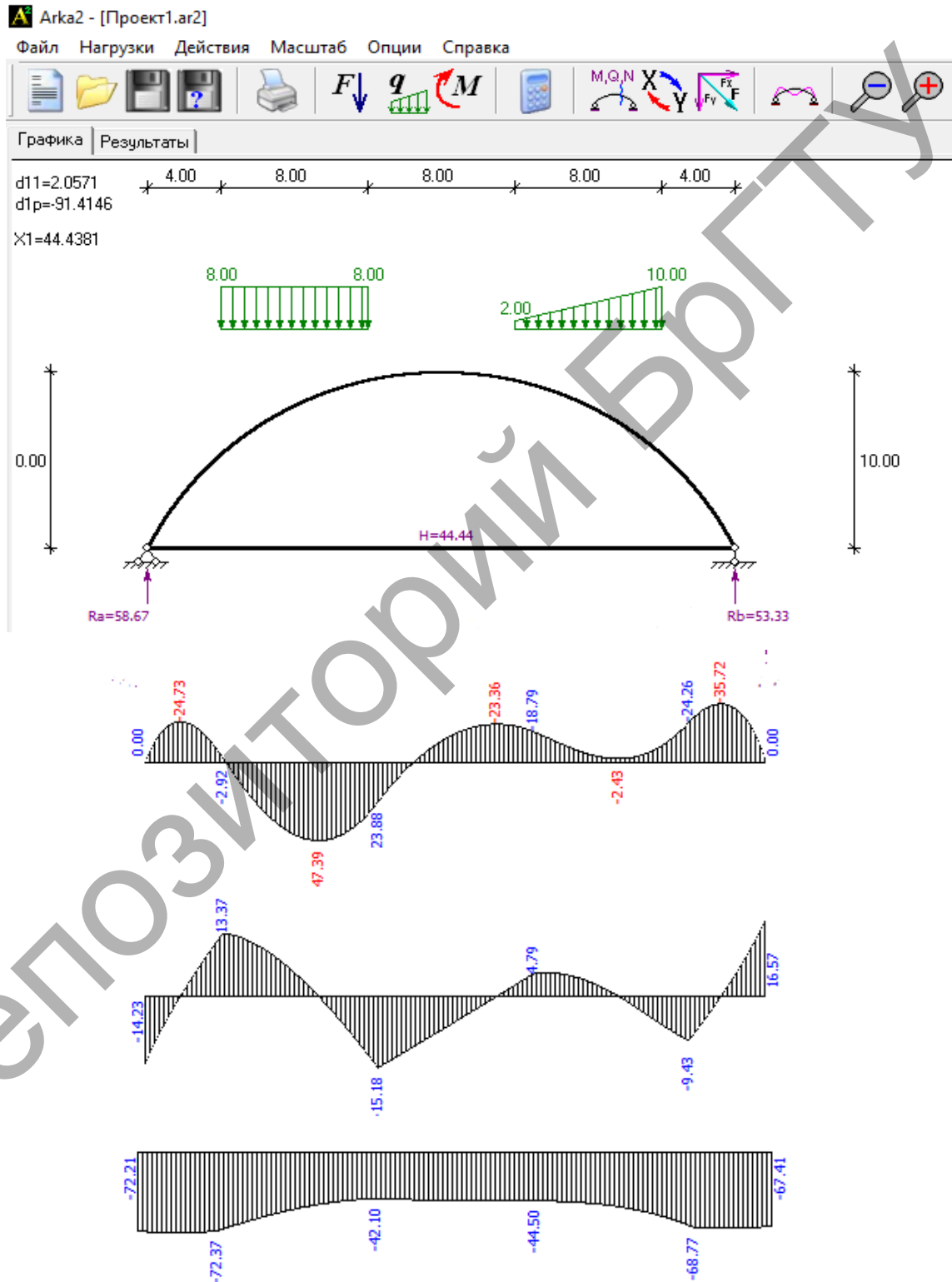


Рисунок Е.1 – Результаты расчета усилий M , Q , N в программе Arka2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современный расчет строительных конструкций невозможно представить без использования программных комплексов, которые предоставляют пользователю большое число инструментов в области автоматизированного проектирования.

Программные комплексы сегодня имеют очень большие и широкие возможности для решения самых сложных инженерных задач.

При этом программные комплексы накладывают на пользователя определенные требования:

- умение правильно сформировать расчетную схему;
- производить расчеты сооружений по различным моделям;
- анализировать полученные результаты.

При освоении программных комплексов Лира, SCAD и компьютерных программ Sirius, SdCAD, Arka2, Arka3 рекомендуется использовать учебную литературу из библиографического списка и ресурсы сети Интернет.

ЛИТЕРАТУРА,

рекомендуемая для расширенного изучения материала

1. Лира 9.4 Примеры расчета и проектирования / Ю. В. Гензерский [и др.]. – К. : Изд-во НИИАСС, 2006. – 124 с.
2. Лира 9.4. Руководство пользователя. Основы : учебное пособие / Е. Б. Стрелец-Стрелецкий [и др.]. – К. : Изд-во «ФАКТ», 2008. – 164 с.
3. LiraLand. Группа компаний. URL: <http://www.liraland.ru>
4. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD / В. С. Карпиловский [и др.]. – М. : Изд-во АСВ, 2007. – 592 с.
5. Семенов, А. А. Проектно-вычислительный комплекс SCAD в учебном процессе. Ч. I. Статический расчет : учеб. пособие / А. А. Семенов, А. И. Габитов. – М. : Изд-во АСВ, 2005. – 152 с.
6. Игнатюк, В. И. Численные методы решения задач строительной механики : учебное пособие / В. И. Игнатюк, Н. В. Бочарова ; Брест. гос. техн. ун-т. – Брест: БрГТУ, 2015. – 100 с.
7. Караманский, Т. Д. Численные методы строительной механики / Пер с болг. ; под ред. Г. К. Клейна. – М. : Стройиздат, 1981. – 436 с.

Содержание

Введение	3
1. Общие сведения о программных комплексах	4
1.1. Общие сведения о ПК Лира и SCAD	4
1.1.1. Подготовка исходных данных ПК Лира и SCAD	4
1.1.2. Признак схемы ПК Лира и SCAD	5
1.1.3. Последовательность решения задачи в ПК Лира и SCAD	6
1.2. Общие сведения о программе Sirius	7
1.3. Общие сведения о программе SdCAD	7
1.4. Общие сведения о программе Arka2, Arka3	8
2. Лабораторная работа № 1. Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм	9
3. Лабораторная работа № 2. Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок	12
4. Лабораторная работа № 3. Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам	17
5. Лабораторная работа № 4. Расчет усилий в трехшарнирных арках	21
6. Лабораторная работа № 5. Расчет двухшарнирной арки с использованием численного интегрирования	26
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Верификация результатов расчета статически определимой фермы	31
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Верификация результатов расчета статически определимой многопролетной балки	41
ПРИЛОЖЕНИЕ С. Верификация результатов расчета статически определимой рамы	48
ПРИЛОЖЕНИЕ D. Верификация результатов расчета в трехшарнирных арках	54
ПРИЛОЖЕНИЕ E. Верификация результатов расчета в двухшарнирных арках	64
Литература, рекомендуемая для расширенного изучения материала	66

Учебное издание

Игнатюк Валерий Иванович
Бочарова Наталья Владимировна

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по дисциплине

«Численные методы решения задач»

Методические указания

для студентов специальностей

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и
1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий»

дневной и заочной форм обучения

Ответственный за выпуск: Игнатюк В.И.

Редактор: Боровикова Е.А.

Компьютерная вёрстка: Игнатюк В.И.

Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 23.04.2019 г. Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 3,95. Уч. изд. л. 4,25. Заказ № 580. Тираж 21 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Репозиторий БРГТУ

Репозиторий БРГТУ