

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 519.688:004.021, 517.91

ШВЫЧКИНА
Елена Николаевна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ХЕМОСТАТА
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ И СРЕДСТВ КОМПЬЮТЕРНОЙ
МАТЕМАТИКИ**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Минск, 2014

Работа выполнена в учреждении образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина».

Научный руководитель – **ЧИЧУРИН Александр Вячеславович**
кандидат физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений учреждения
образования «Брестский государственный
университет имени А.С. Пушкина».

Официальные оппоненты: **ШУШКЕВИЧ Геннадий Чеславович**
доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой информатики и
компьютерного моделирования учреждения
образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы»;

БАРОВИК Дмитрий Валентинович
кандидат физико-математических наук,
заместитель начальника управления
автоматизации банковских операций
ОАО «Центр банковских технологий».

Оппонирующая организация – учреждение образования «Могилевский
государственный университет имени
А.А. Кулешова».

Защита состоится 20 июня 2014 г. в 16.00 часов на заседании совета по
защите диссертаций Д 02.01.02 при Белорусском государственном
университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (юридический
факультет), ауд. 407.

Телефон ученого секретаря совета: (+375 17) 209-57-09, e-mail: cheb@bsu.by.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке
Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «19» мая 2014 г.

Учёный секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физ.-мат. наук, доцент



Е.С. Чеб

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Перед современными исследователями в области науки и техники обычно ставятся задачи математического моделирования, содержащие приемы решения дифференциальных уравнений. Иногда решения могут быть получены аналитически с помощью многочисленных традиционных для этих задач методов, пригодных для интегрирования уравнений частного вида. Однако чаще решения не могут быть получены аналитическими методами. Между тем появление современных систем компьютерной математики позволяет на основе классических методов качественно изменить подходы и методы изучения решений задач математического моделирования, содержащих системы дифференциальных уравнений. А именно, использование систем компьютерной алгебры дает возможность расширить диапазон реальных приложений, использовать как вычисления, так и средства графической визуализации для углубленного понимания концепций.

При математическом моделировании задач экологии и математической биофизики популяций и сообществ основным объектом исследований является динамика или эволюция популяций. Классический подход к описанию динамики популяций опирается на дифференциальные уравнения Лотка-Вольтерра и их различные модификации. Одним из наиболее широко употребляемых способов описания конкуренции популяций является описание управляемого биореактора – хемостата. Под хемостатом будем понимать математическую модель, описывающую биологический процесс непрерывного культивирования бактерий. Модели хемостата записываются в виде динамических систем Михаэлиса-Ментен¹. В работах двух последних десятилетий подробно описаны качественные, топологические, асимптотические и численные методы интегрирования систем Михаэлиса-Ментен. Для решения таких хемостат-систем аналитическими методами следует обратиться к методам исследования задач аналитической теории дифференциальных уравнений, а именно к исследованиям, посвященным нахождению решений систем третьего порядка с определенными свойствами. Здесь также целесообразно рассмотреть метод построения эквивалентных систем, используемый при исследовании нелинейных уравнений третьего порядка. Упомянутые теоретические методы содержат большое количество ограничений и являются труднореализуемыми на практике. Поэтому следует отдельно рассмотреть и описать процедуры реализации перечисленных теоретических методов к конкретным дифференциальным системам третьего порядка, а также вопросы построения и визуализации их решений в явной

¹ Smith, H.L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H.L. Smith, P. Waltman. – Cambridge University Press, 1995. – 313 p.

форме. По этой причине задачи, рассматриваемые в диссертации, являются весьма актуальными.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь с крупными научными программами (проектами) и темами

Исследования проводились на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений математического факультета учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина» в соответствии с заданиями научных программ, выполнявшихся в рамках: государственной программы научных исследований «Конвергенция», зарегистрированной в Государственном реестре НИОКР (№ госрегистрации 20111110, дата регистрации 31.05.2011); научно-исследовательской работы «Применения методов римановой и финслеровой геометрий к исследованию 2-мерных микро и макро систем» по договору с БРФФИ № Ф11М-152 от 15 апреля 2011 г. (№ госрегистрации 20114765, сроки выполнения 15.04.2011 г. – 31.03.2013 г.); научно-исследовательской работы «Формы и методы совершенствования математической подготовки студентов в техническом ВУЗе», зарегистрированной в государственном реестре НИОК(Т)Р (№ госрегистрации 20111346, сроки выполнения 03.01.2011 г. – 31.12.2013 г.); научной темы кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ им. А.С. Пушкина «Аналитическая и качественная теории дифференциальных уравнений и их приложения», зарегистрированной в государственном реестре НИОК(Т)Р (№ госрегистрации 20113927, сроки выполнения 01.07.2011 г. – 30.12.2015 г.). Тема диссертации соответствует приоритетному направлению фундаментальных научных исследований Республики Беларусь на 2006 – 2010 годы «Математическое и физическое моделирование систем, структур и процессов в природе и обществе, информационные технологии, создание современной информационной структуры», раздел 6.1 «Математические модели и их применение к анализу систем и процессов в природе и обществе». Диссертационные исследования также соответствуют приоритетному направлению научных исследований Республики Беларусь на 2011 – 2015 годы: 5.1. методы математического и компьютерного моделирования, компьютерные технологии и интеллектуальные системы поддержки принятия решений; 12.1. физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является нахождение решений динамической системы Михаэлиса-Ментен; разработка методов ее решения и

их программная реализация в системе компьютерной алгебры; построение дифференциальных систем, эквивалентных дифференциальному уравнению третьего порядка специального вида; создание новых алгоритмов и комплексов программ, написанных с использованием систем компьютерной алгебры.

Цель исследования обусловила постановку следующих *задач исследования*:

- методами компьютерного моделирования и теории дифференциальных уравнений найти решения динамической модели хемостата Михаэлиса-Ментен;

- на основе методов компьютерной алгебры и теории обыкновенных дифференциальных уравнений провести комплексные исследования нормальных систем третьего порядка с мероморфными относительно искомых функций правыми частями, решения которых удовлетворяют заданным предельным свойствам; для этих исследований разработать алгоритмы и комплексы программ;

- методами компьютерного моделирования провести классификацию коэффициентных условий для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с шестью особыми точками, позволяющую построить эквивалентные дифференциальные системы и проинтегрировать их.

Объект исследования – динамические модели хемостата, нелинейные дифференциальные системы третьего порядка.

Предмет исследования – уравнения математических моделей хемостата Михаэлиса-Ментен с постоянными параметрами, нелинейные дифференциальные системы третьего порядка, методы и алгоритмы их решения, средства разработки программных комплексов. Выбор объекта и предмета исследования обусловлен тем, что упомянутые выше задачи часто возникают на практике и являются актуальными в контексте применения инструментария компьютерного моделирования для решения численными и аналитическими методами задач хемостата и задач нелинейных дифференциальных систем третьего порядка.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Метод, соответствующие алгоритмы и программное обеспечение поиска точных и приближенных решений, коэффициентных соотношений, при которых удастся понизить порядок системы для динамической модели хемостата, описывающей конкуренцию двух популяций и одного лимитируемого субстрата.

2. Алгоритм построения приближенных решений с заданными свойствами и комплекс программ для анализа обобщенной модели Михаэлиса-Ментен.

3. Коэффициентные условия, при которых нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка с шестью особыми точками эквивалентно системе двух дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Программные модули нахождения точных решений для исходного дифференциального уравнения при установленных коэффициентных условиях.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты, приведенные в диссертации и выносимые на защиту, получены автором лично. Роль научного руководителя А.В. Чичурина состояла в постановке задач, рассматриваемых в работе, и анализе полученных соискателем результатов. В совместных работах научный руководитель формулировал цели и задачи исследования, а также принял участие в выборе методов и обсуждении полученных результатов. Из работ, опубликованных совместно с другими авторами, в диссертацию включены те результаты, которые принадлежат автору этой работы.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на: республиканской конференции «Инновационные технологии управления в экономике» (Брест, 2007); республиканской научно-методической конференции молодых учёных (Брест, 2007); международной конференции «Computer algebra systems in teaching and research», CASTR (Седльце, РП) (2009, 2011, 2013); республиканской конференции «Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике» (Брест, 2009, 2010, 2011, 2012); республиканской конференции «Современные проблемы математики и вычислительной техники» (Брест, 2007, 2009, 2011, 2013); республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 2010); международной конференции «7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics» (ССМЕСН'2011) (Седльце, РП, 2011); международной конференции «Волинсь очима молодих науковців: минуле, сучасне, майбутнє» (Луцк, Украина, 2010, 2011); международной конференции «Математика. Інформаційні технології. Освіта.» (Луцк-Свитязь, Украина, 2012); международной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» (Брест, 2012); международной математической конференции «XI Белорусская математическая конференция» (Минск, 2012); республиканской конференции «Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике» (Брест, 2013); международной математической конференции «Еругинские чтения – XV» (Гродно, 2013); научном семинаре

«Дифференциальные уравнения и их приложения» (научный руководитель – профессор, доктор физ.-мат. наук И.П. Мартынов) (Гродно, 2011); научном семинаре математического факультета (научный руководитель – кандидат физ.-мат. наук, профессор И.Г. Кожух) (Брест, 2012); научном семинаре физико-математического факультета (научный руководитель – кандидат физ.-мат. наук, профессор И.Г. Кожух) (Брест, 2014); республиканском научном семинаре «Математическое моделирование» (научный руководитель – член корреспондент НАН Беларуси, доктор физ.-мат. наук, профессор В. И. Корзюк) (Минск, 2012, 2014).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 27 научных работах, из которых 6 – статьи, соответствующие п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, в том числе одна статья в известном авторитетном российском сборнике научных трудов ИСА РАН «Динамика неоднородных систем», 2 статьи в рецензируемых зарубежных сборниках научных трудов (общим объемом 2,12 авторского листа), 1 статья в журнале «Вестник БрГТУ», 7 статей в сборниках материалов научных конференций и 13 тезисов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трёх глав, заключения, библиографического списка и четырех приложений. Первая глава содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации и описание объекта и методов исследования. Основные результаты приводятся во второй и третьей главах. Полный объем диссертации составляет 135 страниц, в том числе 24 рисунка занимают 11 страниц, 4 приложения – 28 страниц. Библиографический список состоит из 117 наименований, включая публикации соискателя.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава содержит аналитический обзор литературы по теме исследования, в котором на основе проведённого анализа литературных источников формулируются цель и основные задачи диссертационной работы.

Математическое моделирование динамики развития биологических процессов является актуальной задачей, связанной с ее широким использованием в медицинской и пищевой промышленности, экологии, микробиологической промышленности, а также при производстве генетически модифицированных продуктов. В диссертационной работе под хемостатом понимается математическая модель, описывающая биологический процесс для непрерывного культивирования бактерий, обеспечивающая оптимальные

температурные условия и постоянное поступление свежей питательной среды при одновременном удалении части бактериальной культуры. В простейших моделях хемостата рассматривается конкуренция нескольких видов микроорганизмов, которые питаются одним ограниченным питательным веществом, называемым субстратом. Система дифференциальных уравнений, описывающая процесс культивирования в хемостате двух микробных сообществ при наличии одного субстрата, записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= 1 - s(t) - \frac{m_1 x_1(t)s(t)}{a_1 + s(t)} - \frac{m_2 x_2(t)s(t)}{a_2 + s(t)}, \\ \dot{x}_1(t) &= \left(\frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 \right) x_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \left(\frac{m_2 s(t)}{a_2 + s(t)} - 1 \right) x_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $s(t)$ обозначает плотность питательного субстрата, $x_1(t)$, $x_2(t)$ – плотности микроорганизмов в момент времени t , остальные параметры m_1 , a_1 , m_2 , a_2 модели (1) являются заданными положительными числами. Данная модель хемостата предложена немецкими учёными Л. Михаэлисом и М. Ментен в 1913 г. В диссертации рассматриваются решения системы (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$s(0) = s_0 \geq 0, \quad x_1(0) = x_{10} \geq 0, \quad x_2(0) = x_{20} \geq 0 \quad (2)$$

для достаточно больших промежутков времени (в том числе возможен бесконечно большой временной интервал). Начальные концентрации искомым функций, определяемые из условий (2), неотрицательны в силу биологического характера задачи.

Объектом исследования являются системы нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, а также обыкновенные дифференциальные уравнения, связанные с ними. Для систем произвольного конечного порядка вида (1) с мероморфными относительно искомым функций правыми частями в работах Н.П. Еругина, А.И. Яблонского, С.Г. Кондратени и других математиков получены условия, которые у нормальных дифференциальных систем позволяют определять существование и вид решений с заданными предельными свойствами. Эти задачи решаются с помощью общего аналитического метода, содержащего редукцию исследуемых систем к системам Брио и Буке, а также различные обобщения теоремы Коши. Там же проведена классификация таких решений и дано их представление в виде рядов для каждого из исследуемых случаев. Для практического использования разработанные теоретические методы являются труднореализуемыми. Это обуславливает потребность разработки новых алгоритмов соответствующих вычислений. В данной диссертации предлагается решение поставленных задач при помощи новых возможностей, которые дают

использование систем компьютерной алгебры, позволяющие алгоритмизировать задачу нахождения решений систем в замкнутой символьной форме.

Во второй главе решается задача о нахождении решений динамической модели хемостата Михаэлиса-Ментен, которая описывается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений (1). В разделе 2.1 рассмотрена модификация простой модели хемостата для случая, когда скорость подачи входной концентрации питательного субстрата является периодической функцией и константы Михаэлиса-Ментен для обеих популяций конкурирующих микроорганизмов равны [7, 12]. Система дифференциальных уравнений, описывающая такую модель, будет иметь вид

$$\begin{cases} s'(t) = f(t) - s(t) - \frac{m_1 x_1(t) s(t)}{a_1 + s(t)} - \frac{\rho m_1 x_2(t) s(t)}{a_1 + s(t)}, \\ x_1'(t) = \left(\frac{m_1 s(t)}{a_1 + S(t)} - 1 \right) x_1(t), \quad x_2'(t) = \left(\frac{\rho m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 \right) x_2(t), \end{cases} \quad (3)$$

где $f(t)$ – ограниченная неотрицательная управляющая функция (кусочно-непрерывная или измерима по переменной t).

Теорема 2.2. [7, 13] Если для системы (3) выполнено условие $a_1 = a_2$, тогда ее решение сводится к решению уравнения

$$x_1'(t) = x_1(t) \frac{a_1 e^t + (m_1 - 1)(c_1 + e^t x_1(t) + c_2 e^{\rho t} x_1^\rho(t) - \int e^t f(t) dt)}{c_1 - \int e^t f(t) dt - e^t a_1 + e^t x_1(t) + c_2 e^{\rho t} x_1^\rho(t)},$$

где $m_2 = \rho m_1$, ρ – действительное положительное число, отличное от единицы; c_1, c_2 – произвольные постоянные. Функции $s(t)$, $x_2(t)$ при этом связаны следующими равенствами

$$x_2(t) = c_2 e^{(\rho-1)t} x_1^\rho(t), \quad s(t) = e^{-t} \left(\int e^t f(t) dt + c_1 \right) - x_1(t) - c_2 e^{(\rho-1)t} x_1^\rho(t).$$

Таким образом, используя теорему 2.2, удается при заданном соотношении на параметры свести задачу интегрирования системы третьего порядка (3) к задаче интегрирования дифференциального уравнения первого порядка. Для решения системы (3) составлены программные модули в системе компьютерной алгебры с использованием численных методов. Построенные модули позволяют осуществлять симуляцию с изменением параметров моделирования в заданных диапазонах, они также обеспечивают визуализацию процессов в динамике для каждого микроорганизма и на фазовой плоскости. На рисунке 1 показаны графики, входящих в систему (3) трех неизвестных функций, а в правом нижнем углу построена фазовая кривая на плоскости (x_1, x_2) . Для значений параметров $m_1 = 2$, $a_1 = 0,01$, $x_1^0 = 0,1$, $\rho = 0,95$ и $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ показано, что популяция $x_1(t)$ осциллируя численно увеличивается, а

популяция $x_2(t)$, наоборот осциллируя численно уменьшается. Исходя из вида рисунка на фазовой плоскости, можно сделать вывод о колебании фазовой траектории в окрестности начала координат. Более того, при небольшом значении времени может быть решен вопрос о значениях максимальных концентраций микроорганизмов и субстрата.

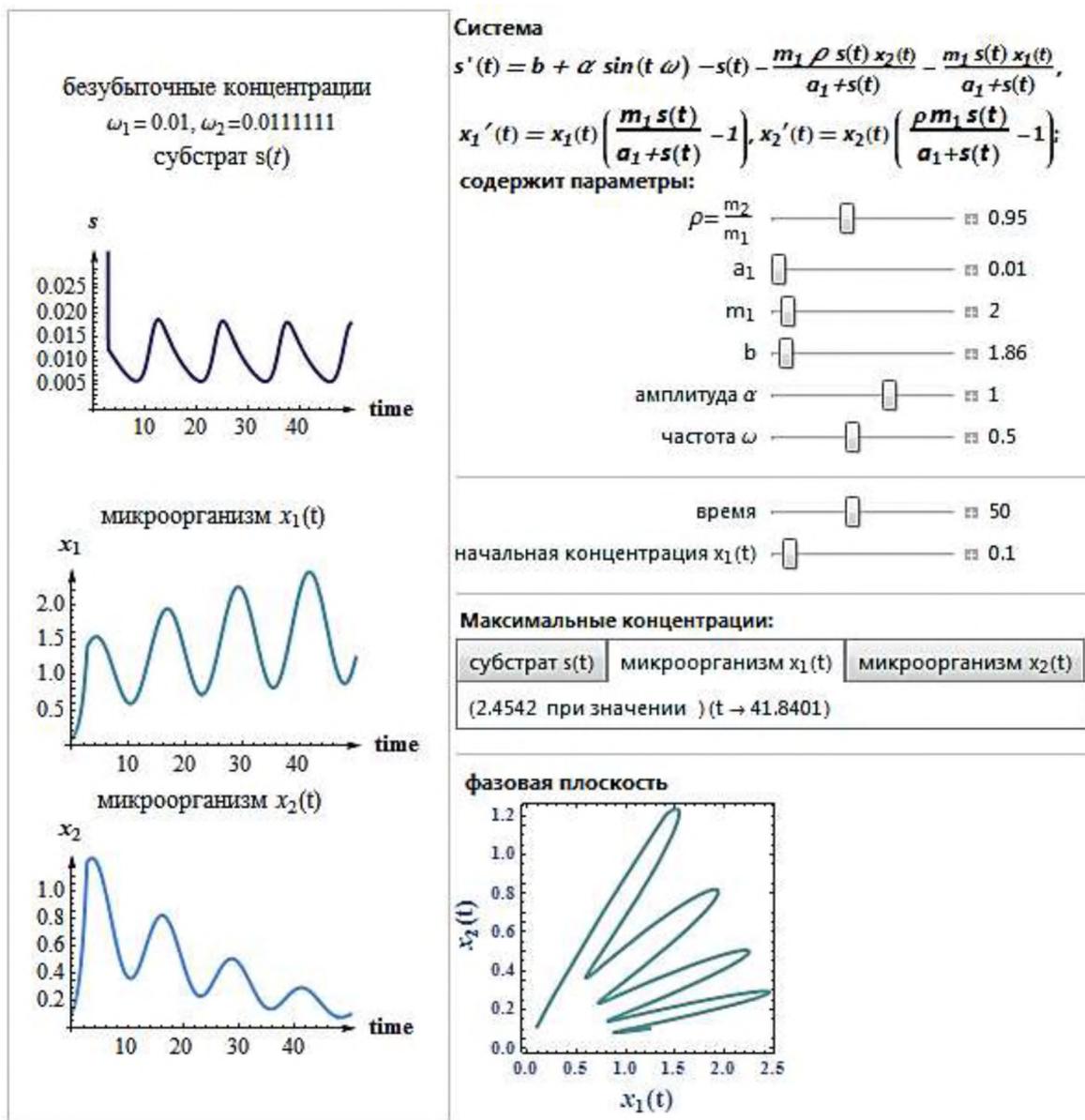


Рисунок 1 – Численное решение системы (3) при периодической входной скорости подачи субстрата $f(t) = b + \alpha \sin(\omega t)$

Также для случая постоянной функции скорости подачи субстрата в хемостат, то есть когда $f(t) \equiv 1$, применен метод построения решений в виде ряда Тейлора. Для конкретных значений параметров системы (1) методами компьютерной алгебры найдены решения в виде отрезков ряда Тейлора [13]. Например, для следующих значений параметров

$$m_1 = 1,3, a_1 = 0,2, x_1^0 = 0,07, \rho = 0,96$$

решение системы Михаэлиса-Ментена примет вид

$$s(t) = 0,92999 + 2,886 \times 10^{-8} t^4 + 4,939 \times 10^{-7} t^3 - 0,000060565 t^2 - 0,00370198 t - e^{-0,04t} \left(0,07 + 0,00370198 t + 0,000060566 t^2 - 4,939 \times 10^{-7} t^3 - 2,886 \times 10^{-8} t^4 \right)^{0,96},$$

$$x_1(t) = 0,07 + 0,00370198 t + 0,000060566 t^2 - 4,939 \times 10^{-7} t^3 - 2,886 \times 10^{-8} t^4,$$

$$x_2(t) = e^{-0,04t} \left(0,07 + 0,00370198 t + 0,000060566 t^2 - 4,939 \times 10^{-7} t^3 - 2,886 \times 10^{-8} t^4 \right)$$

Смоделируем поведение первого микроорганизма в зависимости от значений, входящих в решение параметров. Из рисунка 2 видно, что, изменяя значения параметров m_1 , a_1 , ρ , x_1^0 , удастся смоделировать поведение первого микроорганизма. При заданных параметрах на рисунке 2 можно сделать вывод о том, что со временем первый микроорганизм погибает.

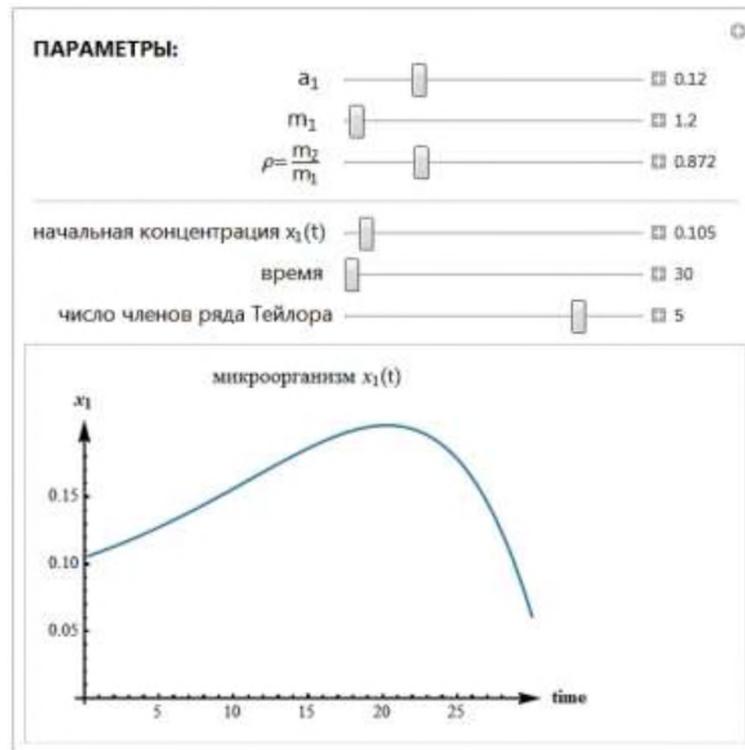


Рисунок 2 – График функции $x_1(t)$ при значениях параметров

$$m_1 = 1,2, \quad a_1 = a_2 = 0,12, \quad \rho = 0,872, \quad x_1^0 = 0,105, \quad t = 30.$$

Рассмотрим немасштабированную модель хемостата Михаэлиса-Ментен вида

$$\begin{cases} s'(t) = (1 - s(t))D - \frac{m_1 x_1(t)s(t)}{a_1 + s(t)} - \frac{m_2 x_2(t)s(t)}{a_2 + s(t)}, \\ x_1'(t) = \left(\frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - D \right) x_1(t), \quad x_2'(t) = \left(\frac{m_2 s(t)}{a_2 + s(t)} - D \right) x_2(t), \end{cases} \quad (4)$$

где число D – коэффициент вымывания, который определяет скорость потока вещества через хемостат. Система (4) при определенных коэффициентных соотношениях имеет решение в аналитической форме [7].

Теорема 2.3. Пусть выполняются соотношения $a_1 = a_2$ и $D = m_1 = 2$. Тогда решение системы (4) запишется в следующем виде

$$s(t) = 1 - x_1(t) - c_1 e^{(m_2-2)t} x_1^{m_2/2}(t), \quad x_2(t) = c_1 e^{(m_2-2)t} x_1^{m_2/2}(t),$$

$$\frac{4a_1}{(m_2-2)^2} \left(\frac{2a_1}{c_1} \exp \left(-\frac{m_2-2}{2a_1} (a_1 (\ln x_1(t) + 2t) - x_1(t) + \ln x_1(t)) \right) - \right.$$

$$\left. - (m_2-2)(x_1(t))^{2a_1} E_{\frac{m_2-2}{2a_1}} \left(-\frac{m_2-2}{2a_1} x_1(t) \right) = c_2 \right), \quad (5)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, $E_{\frac{m_2-2}{2a_1}}$ обозначает экспоненциальный

интеграл функции $E_n(z) = \int_1^{\infty} e^{-zt} / t^n dt \left(n = \frac{m_2-2}{2a_1} \right)$.

Для найденного двухпараметрического решения (5) построена его визуализация при различных значениях параметров.

Рассмотренные математические модели имеют реальные приложения. Например, в работе биологов С. Хансена и С. Хубелла² описана модель хемостата для двух видов бактерий вида *Escherichia coli*, параметры которых удовлетворяют указанным выше условиям. При этом их эксперименты согласуются с полученными в диссертации теоретическими результатами.

Раздел 2.2 содержит развитие аналитического метода нахождения решений с заданными предельными свойствами у нормальных систем третьего порядка с мероморфными относительно искомым функций правыми частями. Рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{P_i(x_1, x_2, x_3)}{Q_i(x_1, x_2, x_3)} \quad (i=1,2,3), \quad (6)$$

где $x_i(z)$ ($i=1,2,3$) – искомые функции, z – независимая комплекснозначная переменная; функции P_i и Q_i ($i=1,2,3$) принадлежат пространству комплексных голоморфных функций на области $D^3 \subset C^3$ и являются полиномами по x_1, x_2, x_3 . Будем искать решения $x_i = x_i(z)$ ($i=1,2,3$) системы (6), которые удовлетворяют заданным предельным свойствам

$$x_i \rightarrow \infty \quad (i=1, 2, 3) \text{ при } z \rightarrow z_0,$$

$$x_i \rightarrow \infty \quad (i=1, 2), \quad x_3 \rightarrow x_{30} \text{ при } z \rightarrow z_0, \quad (7)$$

² Hansen, S.R. Single-nutrient microbial competition: qualitative agreement between experimental and theoretically forecast outcomes / S.R. Hansen, S.P. Hubbell // Science. – 1980. – Vol. 207 (4438). – P. 1491–1493.

$$x_1 \rightarrow \infty, \quad x_2 \rightarrow x_{20}, \quad x_3 \rightarrow x_{30} \text{ при } z \rightarrow z_0,$$

$$x_i \rightarrow x_{i0} \quad (i = 1, 2, 3) \text{ при } z \rightarrow z_0.$$

При исследовании систем вида (6) в работах Н.П. Еругина, А.И. Яблонского, Т.С. Будько, А.В. Чичурина рассматривалась замена вида

$$x_1 = \frac{1}{u}, \quad x_2 = \frac{V_2}{u}, \quad x_3 = \frac{V_3}{u},$$

которая сводит систему (6) к системе Брио и Буке. Однако класс систем, допускающих такую редукцию, оказывается достаточно узким³. Для обобщения этого метода введем замену [4]

$$x_1 = \frac{1}{u^{\mu_1}}, \quad x_2 = \frac{V_2}{u^{\mu_2}}, \quad x_3 = \frac{V_3}{u^{\mu_3}}, \quad (8)$$

где μ_1, μ_2, μ_3 – решения системы алгебраических уравнений вида

$$\sum_{k=1}^3 \mu_k (p_{jk} - q_{jk}) = 1 + \mu_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

p_{jk}, q_{jk} ($j, k = 1, 2, 3$) – параметры системы (6). Далее доказано, что решения системы (6) можно записать в виде

$$x_i = \tau^{-\mu_i} (\beta_i + N_i(\tau)) \quad (i = 1, 2, 3),$$

$\beta_1 = 1$, $N_i(\tau)$ – степенные ряды, сходящиеся в окрестности точки $\tau = 0$ ($z = z_0$), которые обладают свойством (7) [5, 9, 11, 15].

Для решения нормальных систем (6) в явном виде разработан алгоритм, который реализован в виде комплекса программных модулей, написанных в системе компьютерной алгебры [19, 20, 21]. Указанный алгоритм содержит следующие этапы:

1. Система дифференциальных уравнений (6) записывается в кодах системы компьютерной алгебры, для нее проверяются теоретические условия существования решений, и в случае их выполнения определяется точный вид замены (8).

2. Посредством замены (8) система (6) приводится дифференциальному уравнению первого порядка относительно искомой функции $z = z(u)$ и системе двух дифференциальных уравнений Брио и Буке, решения которой ищутся в виде степенных рядов по переменным u и $\ln u$ с использованием для этого специальных программных модулей.

3. Нахождение функции $u = u(z)$. Найденные решения системы Брио и Буке позволяют свести решение задачи к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка относительно функции $z = z(u)$. После

³ Будько, Т.С. Об одном общем методе отыскания решений с бесконечными предельными значениями у автономных дифференциальных систем с рациональными правыми частями / Т.С. Будько, А.И. Яблонский // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 11. – С. 1852–1856.

интегрирования полученного дифференциального уравнения используется алгоритм обращения функции с процедурой определения требуемого количества ненулевых слагаемых решений системы Брио и Буке.

4. Построение решений $x_i = x_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) системы (6) в явном виде, визуализация решений и исследование их свойств в зависимости от входящих параметров.

Приведены примеры, в которых реализован описанный программный алгоритм построения решений в форме рядов, нарисованы графики поверхностей решений в трехмерном пространстве для комплексных значений переменной z [4, 5, 21]. На основе чего проведен подробный анализ особых точек решений и их поведения в окрестности этих точек.

Применение разработанного алгоритма и комплекса программ дают возможность для простой пищевой цепочки, описываемой динамической моделью хемостата Михаэлиса-Ментен (1), построить семейство решений [6, 22, 24, 25, 26, 27]. Найдено двухпараметрическое решение динамической модели хемостата Михаэлиса-Ментен

$$\begin{aligned}
 s(\tau) &= u(\tau), \\
 x_1(\tau) &= \frac{1}{2}\alpha_2 \left(2 - 2u(\tau) - \frac{u(\tau)^2 m_1 (\alpha_2 - 1)}{a_1} - \frac{u(\tau)^2 m_2 \alpha_3}{a_2} \right), \\
 x_2(\tau) &= \frac{1}{2}\alpha_3 \left(2 - 2u(\tau) - \frac{u(\tau)^2 m_1 \alpha_2}{a_1} - \frac{u(\tau)^2 m_2 (\alpha_3 - 1)}{a_2} \right), \\
 u(\tau) &= \frac{\sqrt{8a_1 a_2 \tau (a_2 m_1 \alpha_2 + a_1 m_2 \alpha_3 + a_1 a_2) + 4a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2}}{2(a_2 m_1 \alpha_2 + a_1 m_2 \alpha_3 + a_1 a_2)},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где $\tau = t - t_0$. Исследуем поведение полученного решения (9) для системы (1) с конкретными коэффициентами. Пусть коэффициенты системы (1) имеют вид

$$m_1 = 8, \quad a_1 = 0,3, \quad m_2 = 4,5, \quad a_2 = 0,4.$$

Используя найденный вид функций (9), смоделируем поведение микроорганизмов $x_1(t)$, $x_2(t)$, положив $t_0 = 0$ и $\tau = t$. На рисунке 3 показаны изменения их концентраций при параметрах $\alpha_2 = 0,2$, $\alpha_3 = 0,45$ для промежутка $t \in [0, 10)$, что демонстрирует принцип «конкурентного исключения», то есть первый микроорганизм (функция $x_1(t)$) выживает, а второй микроорганизм (функция $x_2(t)$) вымирает [23]. При этом полученные результаты полностью согласуются с предыдущими исследованиями. Также одной из целей диссертационных исследований является возможность

проиллюстрировать теоретическую допустимость появления различных моделей.

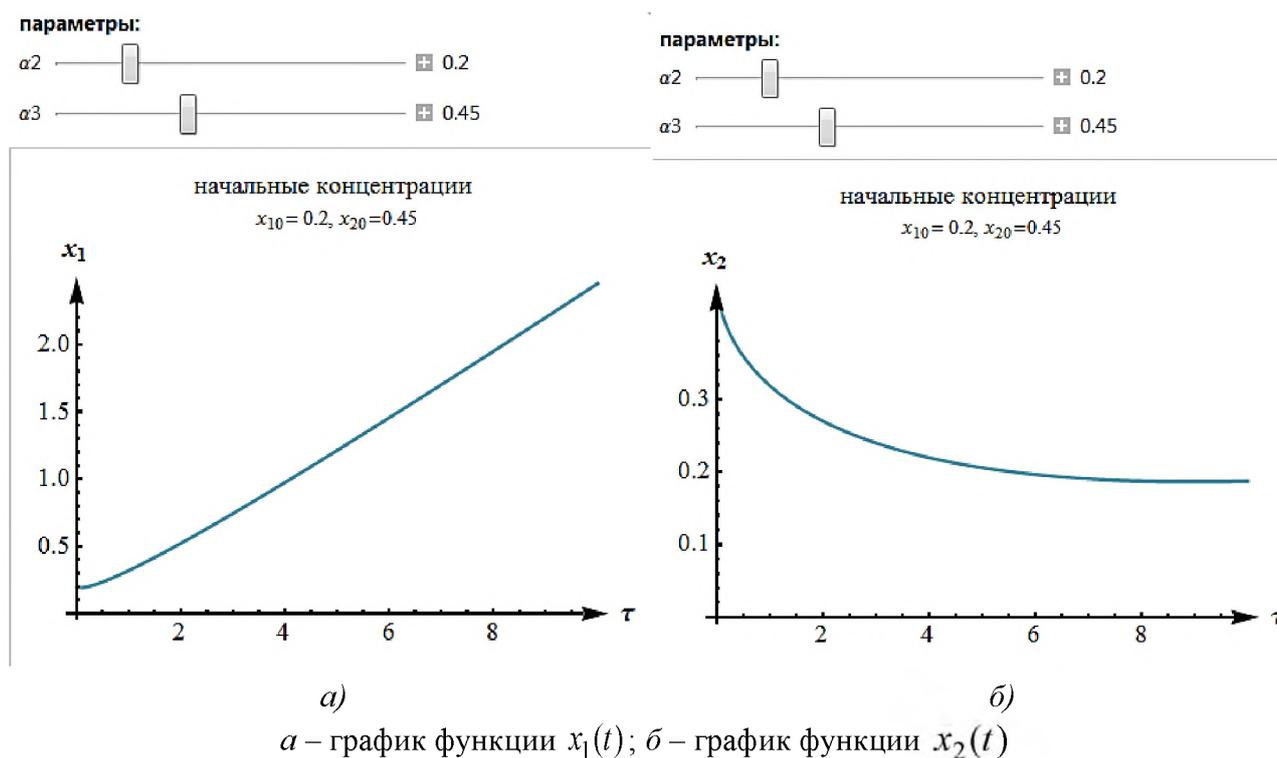


Рисунок 3 – Пример «конкурентного исключения» для двух микроорганизмов, питающихся одним ограниченным субстратом

В третьей главе диссертации для уравнения третьего порядка вида

$$w''' = \sum_{k=1}^6 \frac{w' w'' + A_k (w')^3 + c_k w'}{w - a_k} + e w' \quad (10)$$

при помощи компьютерных методов строятся эквивалентные системы. Коэффициенты уравнения (10) являются функциями независимой переменной z . Для уравнения (10) строится эквивалентная система вида

$$\begin{cases} w'' = f_1(z, w)w'^2 + f_2(z, w)v + f_3(w), \\ v' = -2f_1(z, w)w'v, \end{cases} \quad (11)$$

где $f_i (i = \overline{1,3})$ – функции по z и w [10, 16, 18].

Введем в рассмотрение $\sigma_k (k = \overline{1,6})$ – основные симметрические многочлены, составленные из коэффициентов уравнения (10) $a_k, (k = \overline{1,6})$ и параметр α_2 , определенный специальным образом⁴.

Система дифференциальных уравнений для отыскания неизвестных функций $f_i (i = \overline{1,3})$ имеет следующий вид [1, 2, 17]

⁴ Чичурин, А.В. О точных решениях нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с шестью особыми точками / А.В. Чичурин // Динамика неоднородных систем : тр. ИСА РАН ; ред. Ю.С. Попков. – Москва, 2010. – Т.56, №1. – С. 20–29.

$$\begin{aligned}
& f_2 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w - a_k} - \frac{\partial f_2}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \\
& -2f_1^2 + f_1 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w - a_k} + \sum_{k=1}^6 \frac{A_k}{w - a_k} - \frac{\partial f_1}{\partial w} = 0, \\
& e - 2f_3 f_1 + f_3 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w - a_k} + \sum_{k=1}^6 \frac{C_k}{w - a_k} + \frac{\partial f_3}{\partial w} = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 3.8. Пусть коэффициенты уравнения (10) удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^6 a_k = 0$ и точки, соответствующие a_k ($k = \overline{1,6}$), расположены симметрично относительно начала координат. Если параметры $\sigma_2, \sigma_4, \alpha_2$ связаны между собой одним из соотношений

- 1) $\sigma_2 = \frac{\alpha_2}{17} (49 \pm 2\sqrt{154}), \sigma_4 = -\frac{\alpha_2^2}{2023} (49 \pm 2\sqrt{154})^2$;
- 2) $\sigma_4 = \frac{1}{4} (14\alpha_2\sigma_2 - 3\sigma_2^2 - 15\alpha_2^2)$;
- 3) $\sigma_2 = \frac{\alpha_2}{4} (7 \pm i\sqrt{11}), \sigma_4 = -\frac{\alpha_2^2}{64} (7 \pm i\sqrt{11})^2$;
- 4) $\sigma_2 = 2\alpha_2, \sigma_4 = \alpha_2^2$;
- 5) $\sigma_4 = \alpha_2 (2\sigma_2 - 3\alpha_2)$;
- 6) $\sigma_4 = -\alpha_2\sigma_2$,

то уравнение (10) эквивалентно системе вида (11), и построенная система двух дифференциальных уравнений проинтегрирована в квадратурах в замкнутой форме.

Замечание 3.2. В случае выполнения условий теоремы 3.8 построен программный модуль и новая функция, которые позволяют вычислить явный вид коэффициентов функций $f_i(z, w)$ ($i = \overline{1,3}$) из системы (12) и проинтегрировать соответствующую систему (11) в квадратурах в замкнутой форме [1, 3, 14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Используя разработанный программный комплекс для простой пищевой цепочки, описываемой динамической моделью хемостата Михаэлиса-Ментен, построены приближенные решения. Для случая, когда константы Михаэлиса-Ментен для обеих популяций конкурирующих микроорганизмов равны, поставленная задача сведена к решению одного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. Для двух моделей хемостата в

случаях, когда управляющая функция скорости подачи субстрата в хеостат является периодической и постоянной, составлены программные модули, использующие численные методы, которые осуществляют моделирование процессов хеостатного культивирования с изменением параметров системы в заданных диапазонах, также обеспечивают визуализацию процессов в динамике для каждого микроорганизма. Для немасштабированной модели хеостата Михаэлиса-Ментен при заданных коэффициентных соотношениях на входящие параметры найдено аналитическое решение и построена его визуализация [6, 7, 12, 24].

2. Аналитический метод, который обобщает описанные ранее методы и алгоритм для его реализации. Составлен программный комплекс, включающий процедуры проверки теоретических условий существования решений, алгоритмы представления решений для нормальных дифференциальных систем третьего порядка, удовлетворяющих заданным предельным условиям в явном виде, а также их визуализация в комплексной плоскости [4, 5, 21].

3. Разработаны алгоритмы и процедуры для аналитических расчетов в системе компьютерной алгебры, с помощью которых для дифференциального уравнения третьего порядка с шестью особыми точками построена эквивалентная ему дифференциальная система. Получены коэффициентные соотношения, которые устанавливают эквивалентность построенной системы и исходного дифференциального уравнения. Программный модуль и новая программная функция, при помощи которых строятся эквивалентные системы в явном виде и интегрируется исходное нелинейное уравнение в квадратурах в замкнутой форме [1, 2, 3, 14].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты имеют приложения в математической экологии, микробиологической промышленности, а также решении задач естествознания, связанных с моделированием процессов математической и теоретической физики. Результаты исследований являются новыми и могут быть использованы в дальнейших исследованиях моделирования конкурирующих популяций микроорганизмов, описываемого динамической системой уравнений Михаэлиса-Ментен. Разработанные алгоритмы и программы могут быть использованы для нахождения решений математических моделей, содержащих обыкновенные дифференциальные уравнения третьего порядка, и их анализа в различных отраслях науки. Результаты диссертации также могут быть использованы в учебном процессе при чтении курсов математического моделирования и дифференциальных уравнений, которые читаются в Белорусском, Брестском, Гродненском, Гомельском и других университетах.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в соответствии с п. 18 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь

1. Швычкина, Е.Н. О представлении дифференциального уравнения Шази с шестью постоянными полюсами в виде системы двух дифференциальных уравнений с помощью системы *Mathematica* / Е.Н. Швычкина // Динамика неоднородных систем : тр. ИСА РАН ; ред. Ю.С. Попков. – Москва, 2010. – Т.53, №1. – С. 250–258.

2. Швычкина, Е.Н. О построении системы, эквивалентной дифференциальному уравнению Шази с шестью особыми точками / Е.Н. Швычкина // Весн. Брэсцкага ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2010. – №2. – С. 142–148.

3. Shvychkina, H. Building the third order differential system with *Mathematica* / H. Shvychkina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics; Eds.: L. Gadomski [and others]. – Siedlce, 2011. – P. 136–140.

4. Швычкина, Е.Н. О компьютерном моделировании поиска решений с бесконечными предельными свойствами у нормальных дифференциальных систем третьего порядка / Е.Н. Швычкина // Весн. Гродзен. дзярж. ўн-та ім. Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2012. – Т. 129, № 2. – С. 43–52.

5. Chichurin, A. Finding the solutions with the infinite limite properties for the third order normal system of differential equations using the Mathematica system / A. Chichurin, H. Shvychkina // Classical and Celestial Mechanics : Selected Papers ; Eds.: L. Gadomski [and others]. – Siedlce, 2012. – P. 20–28.

6. Чичурин, А.В. О построении решений с заданными предельными свойствами у систем, описывающих модели хемостата / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – №1. – С. 69–76.

Статьи в других рецензируемых научных изданиях

7. Чичурин, А.В. Компьютерное моделирование двух моделей хемостата для одного питательного ресурса / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Вестник БрГТУ : Физика, математика, информатика. – 2013. – Т. 83, № 5. – С. 9–14.

Статьи в сборниках материалов конференций

8. Чичурин, А.В. О нормальных дифференциальных системах третьего порядка, решения которых обладают бесконечными предельными свойствами / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Инновационные технологии управления в

экономике'2007 : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2007 г. / БрГУ им. А.С. Пушкина ; редкол.: И.В. Белько [и др.]. – Брест, 2007. – С. 154–157.

9. Shvychkina, H. About the third order normal system of differential equations having the infinite limit properties of its solution / H. Shvychkina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 5th International Workshop CASTR'2009, Siedlce, Poland, 28–31 Jan. 2009 / University of Podlasie ; Eds.: L. Gadomski [and others]. – Siedlce, 2009. – P. 165–169.

10. Швычкина, Е.Н. Построение системы эквивалентной дифференциальному уравнению Шази с шестью особыми точками / Е.Н. Швычкина // Современные проблемы математики и вычислительной техники : материалы VI респ. науч. конф. молодых учёных и студентов, Брест, 26–28 ноября 2009 г.: в 2 ч. / БрГТУ. – Брест, 2009. – Ч. 2. – С. 181–183.

11. Швычкина, Е.Н. Моделирование поиска решений с заданными предельными свойствами у нормальных дифференциальных систем третьего порядка / Е.Н. Швычкина // Современные проблемы математики и вычислительной техники : материалы VII респ. науч. конф. молодых учёных и студентов, Брест, 24–26 ноября 2011 г. : в 2 ч. / БрГТУ ; под ред. Рубанова [и др.]. – Брест, 2011. – Ч. 2. – С. 155–157.

12. Чичурин, А.В. Построение решений модели хемостата для одного питательного ресурса / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Международная научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий» : сб. ст. по материалам междунар. науч.- практ. конф., Чебоксары, 12–15 августа 2013 г. : в 2 ч. / ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – Чебоксары, 2013. – Ч. 2. – С. 67–74.

13. Chichurin, A. Numerical research of the chemostat model for the single-nutrient competition / A. Chichurin, H. Shvychkina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 7th International Workshop CASTR'2013, Siedlce, Poland, 22–25 Sep. 2013 / University of Podlasie ; Eds.: M. Jakubiak [and others]. – Siedlce, 2013. – Vol. IV, № 1. – P. 130–136.

14. Швычкина, Е.Н. Решение дифференциальной системы эквивалентной нелинейному уравнению с шестью особыми точками / Е.Н. Швычкина // Современные проблемы математики и вычислительной техники : сб. материалов VIII респ. науч. конф. молодых учёных и студентов, Брест, 21–23 ноября 2013 г. / БрГТУ ; под ред. В.С. Рубанова [и др.]. – Брест, 2013. – С. 170–172.

15. Швычкина, Е.Н. Нормальные дифференциальные системы третьего порядка, решения которых обладают бесконечными предельными свойствами / Е.Н. Швычкина // IX респ. межвуз. науч.-метод. конф. молодых учёных : сб. материалов, Брест, 18 мая 2007 г. / М-во образования Респ. Беларусь, Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; редкол.: К.К. Красовский [и др.]. – Брест, 2007. – С. 59–60.

16. Швычкина, Е.Н. Решение специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных / Е.Н. Швычкина // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XIII респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 15–17 марта 2010 г. : в 2 ч. / ГГУ им. Ф. Скорины ; редкол.: О.М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2010. – Ч. 1. – С. 243–244.

17. Швычкина, Е.Н. Условия эквивалентности дифференциальной системы третьего порядка и дифференциального уравнения Шази с шестью особыми точками / Е.Н. Швычкина // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 21–22 апр. 2010 г. : в 2 т. / БрГУ им. А.С. Пушкина ; редкол.: И.Г. Кожух [и др.]. – Брест, 2010. – Т. 1. – С. 141–142.

18. Швычкина, Е.Н. О существовании решений специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных / Е.Н. Швычкина // Волинь очима молодих науковців: минуле, сучасне, майбутнє : матеріали IV междунар. науч.-практ. конф. аспирантов и студентов, Луцк, 12–13 мая 2010 г. : в 2 т. / Волин. нац. ун-т. им. Леси Украинки. – Луцк, 2010. – Т. 2. – С. 295–296.

19. Швычкина, Е.Н. О Решение дифференциальной системы третьего порядка с помощью системы *Mathematica* / Е.Н. Швычкина // Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень : матеріали V междунар. науч.-практ. конф. студентов и аспирантов, Луцк, 10–11 мая 2011 г. : в 2 т. / Волин. нац. ун-т. им. Леси Украинки. – Луцк, 2011. – Т. 2. – С. 293–294.

20. Чичурин, А.В. Компьютерное моделирование построения решений с заданными предельными свойствами у систем дифференциальных уравнений третьего порядка / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Обчислювальна та прикладна математика : матеріали V междунар. конф. им. академика И.И. Ляшка, Киев, 8–10 сент. 2011 г. / Киевский нац. ун-т. им. Т. Шевченко. – Киев, 2011. – С. 142.

21. Chichurin, A. Finding the solutions with the infinite limite properties for the third order normal system of differential equations using the *Mathematica* system / A. Chichurin, H. Shvyckina // 7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics : book of abstracts of int. conf. CCMECH'2011, Siedlce, 23–28

Oct. 2011 / Rus. Ac. of Sciences, Dorodnitsyn Computing Centre of RAS, Lomonosov Moscow State University, Moscow State Aviation Institution, Collegium Mazovia in Siedlce. – Siedlce, 2011. – P. 23–24.

22. Швычкина, Е.Н. Нахождение решений системы, описывающей биологическую модель хемостата Михаэлиса-Ментена / Е.Н. Швычкина // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2012 г. / Брест, гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; редкол.: А.Е. Будько [и др.] ; под общ. ред. И.Г. Кожуха. – Брест, 2012. – С. 70–72.

23. Чичурин, А.В. Компьютерное моделирование системы уравнений Михаэлиса-Ментена и нахождение их решений / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Математика. Інформаційні технології. Освіта : тез. докладов междунар. науч.-практ. конф., Луцк-Свитязь, 7–9 сент. 2012 г. / Волин. нац. ун-т. им. Леси Украинки. – Луцк-Свитязь, 2012. – С. 32–34.

24. Чичурин, А.В. Нахождение и визуализация решений с заданными предельными свойствами у систем, описывающих модели хемостата / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : тез. докладов междунар. науч. конф., Брест, 17–22 сент. 2012 г. / БрГУ им. А.С. Пушкина ; редкол.: В.И. Корзюк [и др.]. – Брест, 2012. – С. 82–83.

25. Чичурин, А.В. Компьютерное исследование решений систем, описывающих модели хемостата / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // XI Белорусская математическая конференция : тез. докладов междунар. науч. конф., Минск, 4–9 ноября 2012 г. : в 5 ч. / Ин-т мат. НАН Беларуси ; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2012. – Ч. 3. – С. 54–55.

26. Швычкина, Е.Н. Построение решений дифференциальных систем, описывающих периодические модели хемостата / Е.Н. Швычкина // Математические и физические методы исследований: научный и методические аспекты : сб. тез. докладов межфак. науч.-практ. конф., посвящ. 370-летию со дня рождения И. Ньютона, Брест, 22 марта 2013 г. / Брест, гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест, 2013. – С. 49.

27. Чичурин, А.В. О построении и визуализации решений дифференциальных систем, описывающих модели хемостата с периодической подачей вещества / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Еругинские чтения – 2013 : тез. докладов XV междунар. мат. конф., Гродно, 13–16 мая 2013 г. : в 2 ч. / Ин-т мат. НАН Беларуси ; редкол.: А.К. Деменчук [и др.]. – Минск, 2013. – Ч. 2. – С. 80–81.

РЭЗІЮМЭ

Швычкіна Алена Мікалаеўна

Мадэляванне хемастата з выкарыстаннем метадаў і сродкаў камп'ютарнай матэматыкі

Ключавыя словы: мадэлі хемастата Міхаэліса-Ментэн, нелінейныя дыферэнцыяльныя сістэмы трэцяга парадку, камп'ютарнае мадэляванне, комплексы праграм, сістэма камп'ютарнай алгебры.

Мэта работы: знаходжанне рашэнняў дынамічнай сістэмы Міхаэліса-Ментэна; распрацоўка метадаў яе рашэння і праграмная рэалізацыя ў сістэме камп'ютарнай алгебры; пабудова дыферэнцыяльных сістэм, эквівалентных дыферэнцыяльным ураўненням трэцяга парадку спецыяльнага віду; стварэнне новых алгарытмаў і комплексаў праграм, напісаных з выкарыстаннем сістэм камп'ютарнай алгебры.

Метады даследавання: у рабоце выкарыстаны метады камп'ютарнай матэматыкі, матэматычнага мадэлявання, тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў і вылічальнай матэматыкі.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Метад, адпаведныя алгарытмы і праграмнае забеспячэнне пошуку дакладных і набліжаных рашэнняў, каэфіцыентных суадносін, пры якіх атрымоўваецца панізіць парадак сістэмы для дынамічнай мадэлі хемастата, якая апісвае канкурэнцыю двух папуляцый і аднаго лімітаванага субстрата. Алгарытм пабудовы набліжаных рашэнняў з зададзенымі ўласцівасцямі і комплекс праграм для аналізу абагульненай мадэлі Міхаэліс-Ментэн. Каэфіцыентныя ўмовы, пры якіх нелінейнае дыферэнцыяльнае ўраўненне трэцяга парадку з шасцю адмысловымі кропкамі эквівалентна сістэме двух дыферэнцыяльных ўраўненняў першага і другога парадку. Праграмныя модулі знаходжання каэфіцыентных умоў і дакладных рашэнняў для зыходнага дыферэнцыяльнага ўраўнення.

Ступень выкарыстання і вобласць прымянення. Атрыманыя вынікі маюць прымяненне ў матэматычнай экалогіі, мікрабіялагічнай прамысловасці, а таксама ў рашэнні задач прыродазнаўства, звязаных з мадэляваннем працэсаў матэматычнай і тэарэтычнай фізікі. Распрацаваныя алгарытмы і праграмы могуць быць выкарыстаны для знаходжання рашэнняў матэматычных мадэляў, якія змяшчаюць звычайныя дыферэнцыяльныя ўраўненні трэцяга парадку, і іх аналізу ў розных галінах навукі. Вынікі ўкаранёны ў навучальны працэс у Брэсцкім дзяржаўным тэхнічным універсітэце і ў Брэсцкім дзяржаўным універсітэце імя А.С. Пушкіна.

РЕЗЮМЕ

Швычкина Елена Николаевна

Моделирование хемостата с использованием методов и средств компьютерной математики

Ключевые слова: модели хемостата Михаэлиса-Ментен, нелинейные дифференциальные системы третьего порядка, компьютерное моделирование, комплексы программ, система компьютерной алгебры.

Цель диссертационной работы: нахождение решений динамической системы Михаэлиса-Ментен; разработка методов ее решения и программная реализация в системе компьютерной алгебры; построение дифференциальных систем, эквивалентных дифференциальному уравнению третьего порядка специального вида; создание новых алгоритмов и комплексов программ, написанных с использованием систем компьютерной алгебры.

Методы исследования: в работе использованы методы компьютерной математики, математического моделирования, теории дифференциальных уравнений и вычислительной математики.

Полученные результаты и их новизна. Метод, соответствующие алгоритмы и программное обеспечение поиска точных и приближенных решений, коэффициентных соотношений, при которых удается понизить порядок системы для динамической модели хемостата, описывающей конкуренцию двух популяций и одного лимитируемого субстрата. Алгоритм построения приближенных решений с заданными свойствами и комплекс программ для анализа обобщенной модели Михаэлиса-Ментен. Коэффициентные условия, при которых нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка с шестью особыми точками эквивалентно системе двух дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Программные модули нахождения коэффициентных условий и точных решений для исходного дифференциального уравнения.

Степень использования и область применения. Полученные результаты имеют приложения в математической экологии, микробиологической промышленности, а также в решении задач естествознания, связанных с моделированием процессов математической и теоретической физики. Разработанные алгоритмы и программы могут быть использованы для нахождения решений математических моделей, содержащих обыкновенные дифференциальные уравнения третьего порядка, и их анализа в различных отраслях науки. Результаты внедрены в учебный процесс в Брестском государственном техническом университете и в Брестском государственном университете им. А.С. Пушкина.

SUMMARY

Alena N. Shvychkina

Chemostat modeling with the use of methods and means of computer mathematics

Keywords: models of the Michaelis-Menten chemostat, nonlinear differential third-order systems, computer modeling, software, computer algebra system.

Aim of the work: finding solutions of the dynamic Michaelis-Menten system, developing its solution methods, and program implementation in computer algebra, constructing differential systems equivalent to the third-order differential equation of a special form, the creation of new algorithms and programs written with the use of computer algebra systems.

Methods of the research: methods of computer mathematics, mathematical modeling, methods of the theory of differential equations, and computational mathematics.

The results obtained and their novelty. We have developed the method of exact and approximate solutions; coefficient ratios which help decrease the system order for dynamical model of the chemostat describe the interaction between two organisms. We have also developed corresponding algorithms and software. We have obtained the algorithm and software package for constructing approximate solutions with the given conditions for the models generalizing the Michaelis-Menten models. We have found coefficient ratios under which non-linear differential equation of the third order with six singular points is equivalent to the system of two differential equations of the first and second order. We have written program modules for finding coefficient ratios and exact solutions for the original differential equation.

The level of application. The results obtained have applications in mathematical ecology, microbiological industry, as well as in solving the problems of natural science related to modeling the processes of mathematical and theoretical physics. The algorithms and programs can be used to find solutions to mathematical models containing ordinary differential equations of the third order, and for their analysis in various fields of science. The results are implemented in the educational process at Brest State Technical University and Brest State University named after A.S. Pushkin.



Подписано в печать 13.05.14. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.
Ризография Усл печ л. 1,39. Уч.-изд л. 1,5.
Тираж 75 экз. Заказ 232, 233.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
в республиканском унитарном предприятии
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.