На основе изложенного можно определить алгоритм статического расчета систем перекрестных балок методом конечных элементов:

1. Определение расчетной дискретной модели заданной системы перекрестных балок (разделение ее на конечные элементы (КЭ), назначение узлов) и описание ее структуры (нумерация узлов и конечных элементов, определение их числа).

2. Выбор общей и местных систем координат и определение координат узлов в общей системе координат.

3. Составление вектора перемещений узлов расчетной дискретной модели системы.

4. Идентификация конечных элементов (определение их длин $l_s$, жесткостей $EJ_s$ и $GJ_{кр,s}$, типов, установление соответствия между номерами стержней и номерами начального и конечного узлов для этих конечных элементов).

5. Преобразование внешних нагрузок (преобразование пролетных равномерно распределенных нагрузок на стержни к узловым нагрузкам, определение суммарных узловых сил в каждом узле дискретной модели).

6. Построение матриц жесткости конечных элементов в местных системах координат.

7. Формирование матрицы жесткости всей системы в общей системе координат.

8. Получение системы разрешающих уравнений путем учета граничных условий (опорных связей) при этом может быть использована диагональная матрица (1) либо простое вычеркивание строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям.

9. Решение системы разрешающих уравнений и определение узловых перемещений системы.

10. Определение узловых перемещений и усилий для конечных элементов.

11. Определение усилий и перемещений в конечных элементах, построение эпюр внутренних сил в системе и определение ее деформированного вида.

Заключение. В работе представлены особенности и алгоритм расчета балочных систем на неподвижные нагрузки методом конечных элементов в форме метода перемещений.

**Список цитированных источников**

1. Игнатюк В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем. – Брест, 2009. – 172 с.

УДК 681.3:519.3

***Алексеев Т.Ю.***
***Научный руководитель: Игнатюк В.И.***

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА РАСЧЕТА УСИЛИЙ В СИСТЕМАХ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК С УЧЕТОМ УПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ УЗЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

В расчетах методом конечных элементов основное разрешающее уравнение имеет вид [1]:

$$[K]\{\Delta\} = \{P\}, \tag{1}$$

где [*K*] – матрица жесткости системы, {*Δ*} – вектор перемещений узлов системы, {*P*} – вектор внешних узловых нагрузок.

Учет упруго-податливого соединения элементов в узлах вызовет соответствующие изменения в матрицах [*K*] и {*P*}. Так как эти матрицы могут быть сформированы из матриц отдельных конечных элементов (КЭ) [1], учет упругой податливости присоединения КЭ к узлам может быть выполнен на уровне определения матриц жесткости и векторов нагрузок КЭ.

Для конечных элементов систем перекрестных балок, присоединяющихся к узлам с помощью упруго-податливых связей, жесткости которых определяются величинами $c_1$ – $c_6$ (рис. 1) ($c_1$, $c_4$ – жесткости вертикальных связей в начале и в конце стержня, $c_2$, $c_5$ и $c_3$, $c_6$– жесткости соответствующих угловых связей в плоскостях $y'z'$ и $x'z'$), матрица жесткости в местной системе координат будет иметь вид:

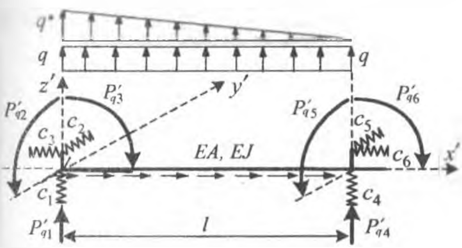



***Рисунок 1 – Схема конечного элемента СПБ***

$$
[K'_1]=\left|\begin{array}{ccc:ccc}
\frac{12EJ}{l^3}k_1 & 0 & -\frac{6EJ}{l^2}k_2 & -\frac{12EJ}{l^3}k_1 & 0 & -\frac{6EJ}{l^2}k_4 \\
0 & -\frac{GJ_{кр}}{l}k_{кр} & 0 & 0 & -\frac{GJ_{кр}}{l}k_{кр} & 0 \\
-\frac{6EJ}{l^2}k_2 & 0 & \frac{3EJ}{l}(k_3+k_1) & \frac{6EJ}{l^2}k_2 & 0 & \frac{3EJ}{l}(k_2-k_1) \\
\hdashline
-\frac{12EJ}{l^3}k_1 & 0 & \frac{6EJ}{l^2}k_2 & \frac{12EJ}{l^3}k_1 & 0 & \frac{6EJ}{l^2}k_4 \\
0 & -\frac{GJ_{кр}}{l}k_{кр} & 0 & 0 & -\frac{GJ_{кр}}{l}k_{кр} & 0 \\
-\frac{6EJ}{l^2}k_4 & 0 & \frac{3EJ}{l}(k_2-k_1) & \frac{6EJ}{l^2}k_4 & 0 & \frac{3EJ}{l}(k_4+k_5)
\end{array}\right|, \tag{2}
$$

где *EA*, *EJ* – продольная и изгибная жесткости стержня, и где обозначено:

$$
k_1=\frac{t_4}{t_2t_4-3t_3^2};\qquad k_2=\frac{t_3+t_4}{t_2t_4-3t_3^2};\qquad k_{кр}=\frac{1}{1+(c_1+c_4)\frac{EA}{l}},
$$

$$
k_3=\frac{1}{3t_4}+\frac{t_3}{t_4}k_2;\qquad k_4=\frac{t_4-t_3}{t_2t_4-3t_3^2};\qquad k_5=\frac{1}{3t_4}+\frac{t_3}{t_4}k_4, \tag{3}
$$

$$
t_2=1+(c_2+c_5)\frac{12EJ}{l^3}+(c_3+c_6)\frac{3EJ}{l};\qquad t_3=(c_6-c_3)\frac{EJ}{l};\qquad t_4=1+(c_3+c_6)\frac{EJ}{l} \tag{4}
$$

При действии на конечных элементов распределённых нагрузок в методе конечных элементов их необходимо преобразовывать к узловым. Это преобразование для конечных элементов, упруго-податливо присоединяемых к узлам, не будет совпадать со случаями жёстко-шарнирного соединения конечных элементов в узлах и может быть получено также на основе расчётов соответствующих конечных элементов [1]. Для случая нагружения КЭ распределенными нагрузками, представленными на рис. 1, величины узловых нагрузок для него будут определяться выражением

$$\left\{P'_q\right\}=\begin{vmatrix}P'_{q1}\\P'_{q2}\\P'_{q3}\\\hline P'_{q4}\\P'_{q5}\\P'_{q6}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{q\,l}{2}\left(1-f_{q2}\right)+\frac{q^*l}{20}\left(10-u_{q1}\right)\\0\\-\frac{q\,l^2}{12}\left(1{,}5-3f_{q2}-f_{q3}\right)-\frac{q^*l^2}{120}\left(20+u_{q2}-6u_{q1}\right)\\\hline\frac{q\,l}{2}\left(1+f_{q2}\right)+\frac{q^*l}{20}u_{q1}\\0\\\frac{q\,l^2}{12}\left(1{,}5+3f_{q2}-f_{q3}\right)+\frac{q^*l^2}{120}u_{q2}\end{vmatrix},\qquad(5)$$

где $f_{q2}=\dfrac{3\,t_{q2}t_4-t_{q3}t_3}{6t_3^2-2t_2t_4}$; $\quad f_{q3}=3f_{q2}\dfrac{t_3}{t_4}+\dfrac{t_{q3}}{2t_4}$; $\quad u_{q2}=\dfrac{3u_2u_{q1}-5s_{q3}}{u_3}$

$$u_{q1}=\frac{8s_{q2}u_3-5s_{q3}u_2}{4u_1u_3-3u_2^2};\qquad t_{q2}=\frac{EJ}{l}\left(\frac{1}{c_6}-\frac{1}{c_3}\right)+\frac{8EJ}{l^3}\left(\frac{1}{c_5}-\frac{1}{c_2}\right);$$

$$t_{q3}=1+\frac{3EJ}{l}\left(\frac{1}{c_3}+\frac{1}{c_6}\right);\qquad s_{q2}=1+\frac{15EJ}{c_2l^3};\qquad s_{q3}=1+\frac{4EJ}{c_3l},\qquad(6)$$

$u_1=1+\dfrac{3EJ}{l^3}\left(\dfrac{1}{c_2}+\dfrac{1}{c_5}\right)+\dfrac{3EJ}{c_3l}$; $\quad u_2=1+\dfrac{2EJ}{c_3l}$; $\quad u_3=1+\left(\dfrac{1}{c_3}+\dfrac{1}{c_6}\right)\dfrac{EJ}{l}$; $\quad t_2,\ t_3,\ t_4$ - см. (3).

Преобразование матриц жесткости и векторов внешних нагрузок конечных элементов из местных в общую систему координат производится с помощью выражений [3]:

$$[K]=[T_\alpha]^T\cdot[K']\cdot[T_\alpha];\qquad \{P_q\}=[T_\alpha]^T\{P'_q\},\qquad(7)$$

где $[T_\alpha]$, $[T_\alpha]^T$ – обычная и транспонированная матрицы преобразования координат.

На основе полученных зависимостей и алгоритма расчета [2, 3] разработана компьютерная программа расчета систем перекрестных балок на статические нагрузки. Программа составлена на языке C# [4] с применением объектно-ориентированной модели программирования для ОС Windows.

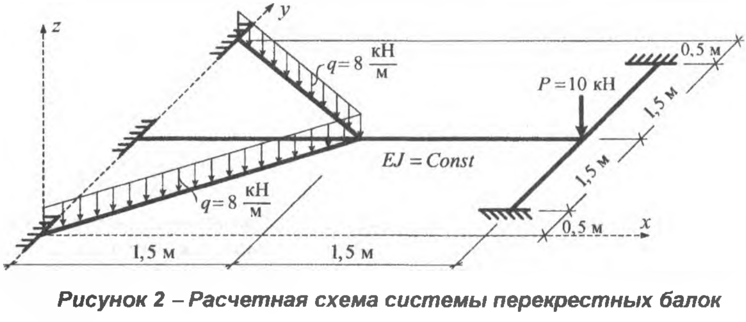
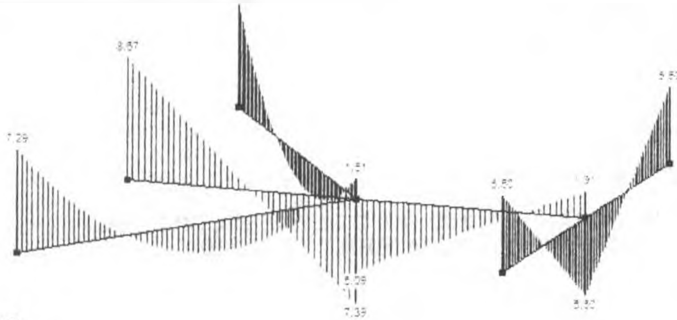
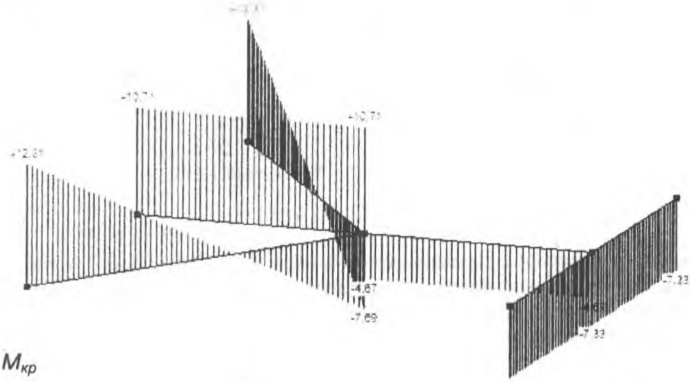



***Рисунок 2 – Расчетная схема системы перекрестных балок***

Эпюра $M_y$



Эпюра $Q_z$



Эпюра $M_{кр}$

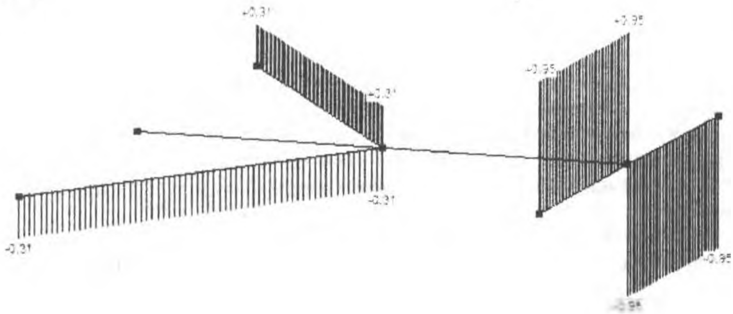


***Рисунок 3 – Результаты расчета системы перекрестных балок***

**Список цитированных источников**


1. Игнатюк, В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем. – Брест: БрГТУ, 2009. – 172 с.
2. Алексеев, Т.Ю. К расчету систем перекрестных балок методом конечных элементов на неподвижные нагрузки // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов / БрГТУ. – Брест, 2015.

3. Алексеев, Т.Ю. Деформирование конечного элемента системы перекрестных балок, упруго-податливо присоединенного к узлам // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов / БрГТУ. – Брест, 2015.

4. Павловская, Т.А. C#: Программирование на языке высокого уровня. – С.-Петербург : Питер, 2014. – 432 с.

УДК 681.3:519.3
***Алексеев Т.Ю.***
***Научный руководитель: Игнатюк В.И.***

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА СИСТЕМЫ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК, УПРУГО-ПОДАТЛИВО ПРИСОЕДИНЕННОГО К УЗЛАМ

***Введение.*** Расчет сооружений методом конечных элементов широко распространен в настоящее время. При этом учет всех особенностей работы сооружений остается актуальной задачей. Соединение в стержневых системах конечных элементов между собой в узлах в большинстве случаев не бывает идеально шарнирным или абсолютно жестким. Поэтому учет упруго-податливого присоединения стержневых конечных элементов к узлам является необходимым и актуальным.

***Постановка задачи.*** Рассматривается расчет систем перекрестных балок методом конечных элементов [1] с учетом упругой податливости узловых сведений [2]. Пусть основное разрешающее уравнение метода конечных элементов

$$[K]\{\Delta\}=\{F\} \qquad (1)$$

решено и определены перемещения узлов ($\Delta_i$) расчетной дискретной модели системы, которые равняются соответствующим перемещениям концов пространственных конечных элементов ($\delta_э$), присоединяемых к этим узлам. Таких перемещений в каждом узле будет шесть – три линейных перемещения по направлениям осей *x*, *y* и *z* общей системы координат и три угла поворота относительно этих осей (рис. 1). В (1) обозначено: [*K*] – матрица жесткости системы; {Δ} – вектор перемещений узлов системы; {*F*} – вектор внешних узловых нагрузок.

Получим зависимости для определения перемещений сечений балочного конечного элемента, упруго-податливого присоединяемого к узлам расчетной дискретной модели системы перекрестных балок, в зависимости от перемещений узловых точек расчетной дискретной модели и действующих на стержни распределенных нагрузок. При этом зависимости для конечного элемента получим сначала в местной системе координат с последующим их преобразованием в общую (глобальную) систему координат.

Узловые перемещения для конечного элемента из глобальной в местную систему координат преобразуем с помощью зависимости [1]

$$\{\delta'_э\}=[T_{\alpha э}]\cdot\{\delta_э\}, \qquad (2)$$

где $[T_{\alpha э}]$ – матрица преобразования координат, вид которой для пространственного стержневого конечного элемента представлен в работе [1].

***Получение расчетных зависимостей.*** Расчет конечного элемента выполним методом перемещений [3], приняв за неизвестные – перемещения конечных точек расчетной дискретной модели стержня ($Z_i$), в которых стержень присоединяется к узлам конечно-элементной модели системы с помощью упру-