УДК 681.3:519.3

Алексеев Т.Ю.

Научный руководитель: Игнатюк В.И.

К РАСЧЕТУ СИСТЕМ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА НЕПОДВИЖНЫЕ НАГРУЗКИ

Одним из основных и наиболее мощных инструментов численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений при действии различных нагрузок и воздействий в последние годы является метод конечных элементов (МКЭ), который позволяет решать задачи с большим числом неизвестных и отличается возможностью высокой степени автоматизации всех процессов, высокой логичностью и универсальностью.

Здесь рассматривается расчет систем перекрестных балок (СПБ) (рис. 1) на неподвижные нагрузки методом конечных элементов в форме метода перемещений.

Разрешающие уравнения МКЭ записываются в виде

$$[E_1]\ \{-[K]\ \{\Delta\}+\{P\}\}=0, \qquad (1)$$

где $\{P\}$, $\{\Delta\}$ – вектора нагрузок и перемещений в узлах системы; $\{K\}$ – матрица жесткости системы, имеющая вид:

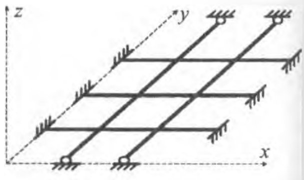


Рисунок 1

$$[K]=\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

где n – число перемещений узлов системы.

Элемент матрицы жесткости k_{mj} представляет собой реакцию в m-ом направлении (величину реакции r_{mj}) от смещения узла в j-ом направлении на единичную величину – Δ_j =1. Смещение узла вызывает деформации всех примыкающих к этому узлу стержней и, следовательно, величина возникающей в этом узле реакции должна включать реакции от действия всех этих стержней. Поэтому k_{mj} вычисляют, задаваясь смещением Δ_j =1 и суммируя реакции от всех КЭ, примыкающих к узлу i_m , к которому относится m-ое направление реакции (и перемещения):

$$k_{mj}=\sum_{i\in i_m} r^i_{mj}. \qquad (3)$$

Величины k_{mj} и r^i_{mj} определяют в общей системе координат. $[E_1]$ – диагональная матрица вида:

$$[E_1]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Число элементов этой матрицы по диагонали равно числу перемещений узлов системы $\{\Delta\}$, причем каждому ее диагональному элементу соответствует узел и направление его перемещения в том же порядке, что и в матрице $\{\Delta\}$. Диагональные элементы матрицы $[E_1]$ могут принимать два значения – 0 либо 1. Единице равны элементы, соответствующие направлениям, по которым перемещения возможны, а нулю – элементы, соответствующие перемещениям узлов в направлениях, по которым перемещения вследствие наличия опорных связей отсутствуют.

Системы перекрестных балок представляют собой стержневые сооружения, в которых конечные элементы располагаются в одной плоскости (рис. 1). СПБ при использовании МКЭ обычно разбивают на конечные элементы (КЭ) балочного типа по узлам стержней и по точкам приложения сосредоточенных нагрузок. В общем случае каждый узел такой системы обладает шестью степенями свободы, однако учитывая, что СПБ работают обычно только на действие вертикальных нагрузок, можно пренебречь рядом перемещений [1] – линейными перемещениями в плоскости СПБ (в направлениях осей x, y) и углами поворота вокруг оси z. В результате вектор перемещений в узле СПБ (рис. 2) будет иметь три перемещения – вертикальное линейное перемещение (в направлении оси z) и два угла поворота относительно осей x и y. Соответственно для конечных элементов СПБ балочного вида будем иметь по шесть перемещений (рис. 2) и усилий (рис. 3) по концам.

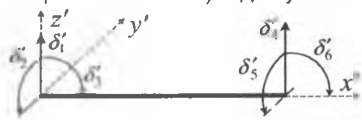


Рисунок 2 – Перемещения концов КЭ СПБ

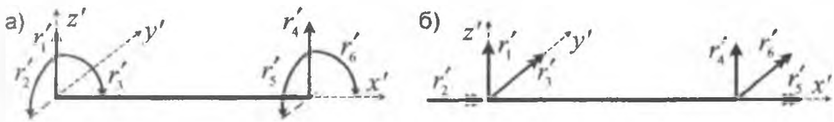


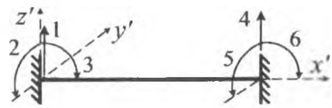
Рисунок 3 – Реакции по концам КЭ СПБ в обычном (а) и в векторном (б) виде

Отметим, что для векторов-моментов направления определяются согласно правилу «буравчика», согласно которому положительными они являются тогда, когда действуют против часовой стрелки, если смотреть на них с конца векторов.

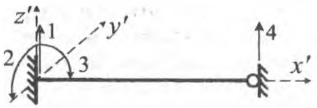
Матрицы жесткости конечных элементов для систем перекрестных балок местной системе координат имеют вид:

а) тип 1:

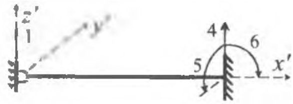
$$[K'_1]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}
\frac{12EJ}{l^3} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} \\
0 & \frac{GJ_{кр}}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ_{кр}}{l} & 0 \\
\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{4EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{2EJ}{l} \\
\hdashline
\frac{12EJ}{l^3} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} \\
0 & \frac{GJ_{кр}}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ_{кр}}{l} & 0 \\
\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{2EJ}{l} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{4EJ}{l}
\end{array}\right] \qquad (5)$$



б) тип 2:



в) тип 3:



$$[K'_s]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{3EJ}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EJ}{l^2} & 0 & \frac{3EJ}{l} & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & \frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad [K'_s]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^3} & 0 & \frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EJ}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & \frac{3EJ}{l} \end{array}\right] \qquad (6)$$

Матрицы жесткости КЭ в общей системе координат получим согласно выражению:

$$[K]=[T_\alpha]^T[K']\,[T_\alpha], \qquad (7)$$

где матрица преобразования координат для КЭ системы перекрестных балок имеет вид:

$$[T_\alpha]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{array}\right] \qquad (8)$$

После определения перемещений узлов расчетной модели из решения системы уравнений (1) усилия по концам КЭ могут быть определяются с помощью выражения:

$$\{r'_s\}=\left[K'_s\right]\cdot\{\Delta_s\}-\{P'_{qs}\}. \qquad (9)$$

Найденные по концам КЭ усилия прикладываем к соответствующим стержням с учетом их знаков (рис. 5) и определяем от их действия по обычным правилам строительной механики растянутые волокна (для изгиба) и знаки поперечных и продольных сил в крайних сечениях стержневого конечного элемента.

Определение изменения усилий внутри конечных элементов (построение эпюр этих усилий) можно выполнить, используя функции Эрмита [1].

Заметим, что для балочных конечных элементов, которые мы здесь рассматриваем, зависимости изменения внутренних сил в них нам хорошо известны:

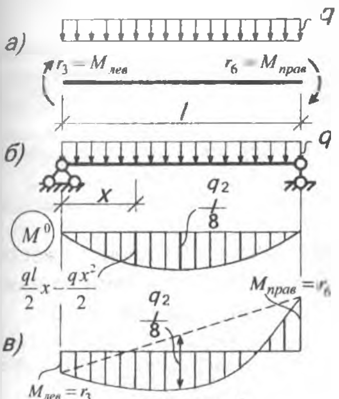


Рисунок 4

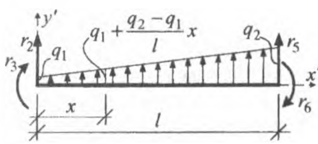


Рисунок 5

– в элементах, нагруженных только по торцам (в узлах), изгибающие моменты изменяются по линейным зависимостям, а поперечные силы постоянны;

– в элементах, на которые действуют распределенные нагрузки, поперечные силы изменяются по линейным, а изгибающие моменты – по параболическим зависимостям;

– крутящие моменты не зависят от равномерно распределенных нагрузок и будут постоянными по длине.

Зная величины усилий по концам конечных элементов и используя указанные закономерности изменений внутренних усилий, несложно построить эпюры этих усилий в каждом из конечных элементов и соответственно во всей системе в целом.

При этом для стержней, на которые действует равномерно распределенная нагрузка (рис. 4*а*), при построении эпюры изгибающих моментов (рис. 4*в*) необходимо к линейной эпюре, полученной соединением прямой линией ординат по концам стержня, добавить (подвесить) балочную эпюру.

Перемещения сечений внутри конечных элементов можно получить с использованием функций Эрмита или на основе известных дифференциальных зависимостей.

Например, для конечного элемента, на который действует нагрузка, распределенная по трапециидальной зависимости (рис. 5), для поперечных перемещений будем иметь зависимость

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(r_3 + r_2 x + \frac{q_1}{2}x^2 + \frac{q_2 - q_1}{6l}x^3\right),$$

проинтегрировав которую два раза

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ}\left(r_3 x + r_2\frac{x^2}{2} + \frac{q_1}{6}x^3 + \frac{q_2 - q_1}{24l}x^4\right) + C_1,$$

$$y = \frac{1}{EJ}\left(r_3\frac{x^2}{2} + r_2\frac{x^3}{6} + \frac{q_1}{24}x^4 + \frac{q_2 - q_1}{120l}x^5\right) + C_1 x + C_2$$

и найдя после подстановки в эти выражения граничных условий (при $x = 0$ – $y = \delta_2$, $\frac{dy}{dx} = -\delta_3$) постоянные интегрирования ($C_1 = -\delta_3; C_2 = \delta_2$), получим

$$u_2 = y = \delta_2 - \delta_3 x + \frac{1}{EJ}\left(r_3\frac{x^2}{2} + r_2\frac{x^3}{6} + \frac{q_1}{24}x^4 + \frac{q_2 - q_1}{120l}x^5\right),$$

$$u_3 = \varphi = \frac{dy}{dx} = -\delta_3 + \frac{1}{EJ}\left(r_3 x + r_2\frac{x^2}{2} + \frac{q_1}{6}x^3 + \frac{q_2 - q_1}{24l}x^4\right) \qquad (10)$$

На основе изложенного можно определить алгоритм статического расчета систем перекрестных балок методом конечных элементов:

1. Определение расчетной дискретной модели заданной системы перекрестных балок (разделение ее на конечные элементы (КЭ), назначение узлов) и описание ее структуры (нумерация узлов и конечных элементов, определение их числа).

2. Выбор общей и местных систем координат и определение координат узлов в общей системе координат.

3. Составление вектора перемещений узлов расчетной дискретной модели системы.

4. Идентификация конечных элементов (определение их длин l_s, жесткостей EJ_s и $GJ_{кр\,s}$, типов, установление соответствия между номерами стержней и номерами начального и конечного узлов для этих конечных элементов).

5. Преобразование внешних нагрузок (преобразование пролетных равномерно распределенных нагрузок на стержни к узловым нагрузкам, определение суммарных узловых сил в каждом узле дискретной модели).

6. Построение матриц жесткости конечных элементов в местных системах координат.

7. Формирование матрицы жесткости всей системы в общей системе координат.

8. Получение системы разрешающих уравнений путем учета граничных условий (опорных связей) при этом может быть использована диагональная матрица (1) либо простое вычеркивание строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям.

9. Решение системы разрешающих уравнений и определение узловых перемещений системы.

10. Определение узловых перемещений и усилий для конечных элементов.

11. Определение усилий и перемещений в конечных элементах, построение эпюр внутренних сил в системе и определение ее деформированного вида.

Заключение. В работе представлены особенности и алгоритм расчета балочных систем на неподвижные нагрузки методом конечных элементов в форме метода перемещений.

Список цитированных источников

1. Игнатюк В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем. – Брест, 2009. – 172 с.

УДК 681.3:519.3

Алексеев Т.Ю.
Научный руководитель: Игнатюк В.И.

КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА РАСЧЕТА УСИЛИЙ В СИСТЕМАХ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК С УЧЕТОМ УПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ УЗЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

В расчетах методом конечных элементов основное разрешающее уравнение имеет вид [1]:

$$[K]\{\Delta\} = \{P\}, \qquad (1)$$