УДК 51:004.02

Рудский Р.А.

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Швычкина Е.Н.

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ДАЛАМБЕРА

В математической физике под струной понимают гибкую упругую нить. Напряжения, возникающие в струне в любой момент времени направлены по касательной к ее профилю. Пусть струна длины l в начальный момент времени направлена по отрезку оси Ох от 0 до l. Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе или, не отклоняя струны, придать в начальный момент ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движения. Говорят, что струна начнет колебаться. Задача заключается в определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени.

Одномерное волновое уравнение, или уравнение колебаний струны, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

где $u(x, t)$ – отклонение от положения равновесия точки струны с абсциссой x в момент времени t; a – фазовая скорость. Уравнение (1) называется *уравнением свободных колебаний*.

Дополнительные условия состоят из начальных и краевых. Предположим, что струна имеет длину l. Левый конец ее закреплен в точке $x = 0$, а правый – в точке $x = l$ (рисунок 1).

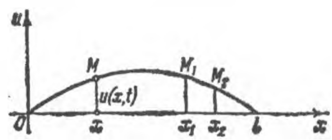

Рисунок 1 – Струна, закрепленная на концах

Если за начальный момент времени принять $t = 0$, то начальные условия запишутся так:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u'_t(x, 0) = F(x), \qquad (2)$$

где $f(x), F(x)$ – известные функции, определенные на отрезке $[0, l]$. Так как концы струны закреплены, то краевые условия имеют вид $u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \ (t > 0)$.

Задача, содержащая только начальные условия, называется *задачей Коши*. Задача, содержащая начальные и краевые условия – *смешанной задачей*.

Задача Коши для одномерного волнового уравнения. Найти решение $u = u(x, t)$ линейного однородного уравнения (1) удовлетворяющее начальным условиям (2). Для решения задачи о свободных колебаниях используют метод характеристик или метод Д'Аламбера.

Для уравнения (1) уравнения характеристик определяются из соотношения [1]

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \iff dx \pm a dt = 0.$$

Общими интегралами этих уравнений являются прямые $x + at = C_1, x - at = C_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Тогда с помощью замены

$x+at=\zeta,\ x-at=\eta$ приводим уравнение (1) к виду $\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\eta}=0$. Решением этого уравнения является функция

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at), \tag{3}$$

где f_1, f_2 – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Определим их исходя из начальных условий (2). При $t=0$ из равенств (2) и (3) получаем

$$f_1(x)+f_2(x)=f(x), \quad a f'_1(x)-a f'_2(x)=F(x). \tag{4}$$

Интегрируя последнее равенство от 0 до x, находим, что

$$a f_1(x)-a f_2(x)=\int_0^x F(t)dt+C, \tag{5}$$

где C – произвольная постоянная. Решив совместно (4) и (5) относительно f_1, f_2, найдем:

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{1}{a}\int_0^x F(t)dt+C\right), \quad f_2(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)-\frac{1}{a}\int_0^x F(t)dt+C\right).$$

Отсюда из формулы (3) получаем искомое решение задачи Коши для уравнения (1):

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x+at)+f(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(t)dt. \tag{6}$$

Соотношение (6) называется *формулой Даламбера*. В таком случае говорят, что решение задачи (1) – (2) представлено в виде суммы бегущих волн, а функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – это профили волн, бегущих, соответственно, влево и вправо. В рассматриваемом случае профили волн со временем не изменяются.

Моделирование колебаний струны при различных начальных значениях. Используя систему компьютерной математики *Mathematica 9.0*, продемонстрируем решение уравнения колебаний струны (1).

На рисунке 2 приведен скриншот программного модуля осуществляющего моделирование решений уравнения (1) при условии, что начальные условия (2) задаются графически [2]. А именно, изменяя положение локаторов на плоскости, можно задать вид функции $f(x)$ графически. Более того, пользователь сам определяет количество локаторов на плоскости, выбирая для этого их положение в системе координат и нажимая левой кнопкой мыши на экран. Далее интерполяционные формулы, включенные в программный модуль, позволяют найти аналитический вид функции $f(x)$ в виде полинома или ломаной на отрезке $[0, l]$. При этом пользователь сам определяет вид функции $f(x)$, выделяя соответствующую кнопку. Например, на рисунке 2 функция $f(x)$ задана в виде полинома (тонкая, пунктирная линия). Триггер запускает решение без начальной скорости, т.е. $F(x)\equiv 0$, а $f(x)$ имеет вид, заданный пользователем. По формуле Даламбера (6) получаем, что

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x+at)+f(x-at)\big).$$

Отсюда можно сделать вывод, что функция $u(x,t)$ есть сумма двух волн одинакового профиля, одна из которых бежит влево, а другая вправо. На рисунке 2 они изображены в виде тонких сплошных линий. При изменении времени t происходит наложение волн, в результате получаем график функции $u(x,t)$ (на рисунке 2 – жирная пунктирная линия).

Таким образом, изменяя положения локаторов, значения параметра a и длины отрезка l, можно осуществлять симуляцию колебаний струны закрепленной на концах. На рисунке 3 приведен график функции $u(x,t)$ при условии, что функция $f(x)$ задана в виде ломаной.

Программный модуль, описанный выше, взят с официального сайта Wolfram Demonstration Projekt, доработан и усовершенствован авторами работы.

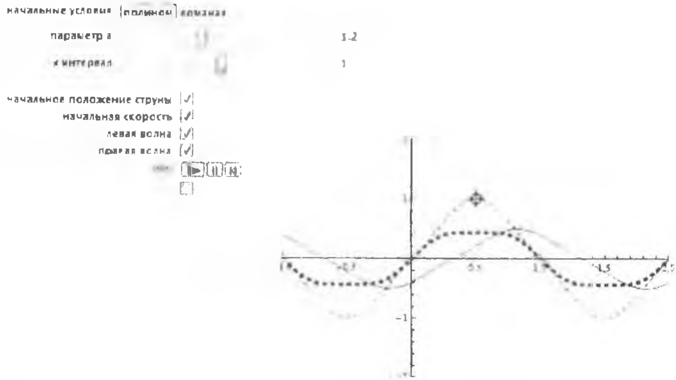

Рисунок 2 – Скриншот программного модуля, осуществляющего моделирование решений уравнения (2) при условии, что $f(x)$ задана графически в виде полинома, $a = 1{,}2$

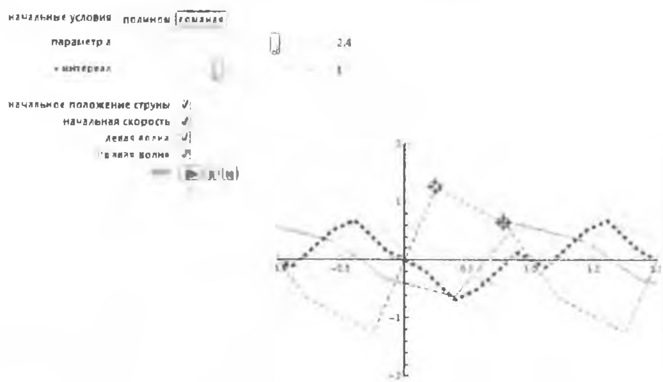

Рисунок 3 – Скриншот программного модуля, осуществляющего моделирование решений уравнения (2) при условии, что $f(x)$ задана графически в виде ломаной, $a = 2{,}4$

Список цитированных источников

1. Жевняк, Р.М. Высшая математика: Учеб. пособие для втузов. Ч. IV / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Мн.: Выш. шк., 1987. – 240 с.

2. http://demonstrations.wolfram.com/TheVibratingString/.