# КОРПОРАТИВНЫЙ МЕНЕДЖМЕНТ И МАРКЕТИНГОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА ДВОЙСТВЕННОСТИ В ОПТИМАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ

*Ю. Н. Павлючук, В. И. Павлючук*
*Экономический факультет, Брестский политехнический институт, г. Брест, Беларусь*

Как известно, показатель объема затрат на производство продукции наряду с показателем объема производства служит одной из важнейших характеристик функционирования любой производственной системы. Сопоставление затрат и результатов является основой анализа эффективности производства и принятия решений о целесообразности его расширения или сокращения. В экономической практике такое сопоставление производится обычно двумя путями - либо с помощью анализа разности $Q–TC$, где $Q$ - объем производства, $TC$ - объем затрат; либо с помощью анализа отношения $TC/Q$. Первый показатель в обобщенном виде характеризует прибыль от производственно-хозяйственной деятельности, второй - затраты на единицу объема производства (*удельные затраты*), позволяющие оценить стоимость различных видов ресурсов в зависимости от тех доходов, которые они приносят предприятию при изготовлении конечной продукции.

Между двумя этими показателями существует следующая зависимость.

В общем виде зависимость между объемами производства и затрат представим в виде классической производственной функции:

$$Q = f(x_i), \qquad (1)$$

где: $x_i$ - объемные характеристики производственных ресурсов.

Если обозначить $C_i$ - нормативная стоимость ресурса $i$-го вида, то себестоимость продукции, или $TC$ можно выразить:

$$TC = \sum^{I} c_i \cdot x_i \qquad (2)$$

Тогда затраты на единицу объема производства равны:

$$Z = \frac{\sum^{i} c_i \cdot x_i}{f(x_i)} \qquad (3)$$

В связи с этим представляет интерес определение минимального уровня затрат на единицу стоимости продукции при заданном ее объеме:

$$Z = \min \frac{\sum^{i} c_i \cdot x_i}{Q} \qquad (4)$$

Поскольку именно минимально допустимое значение удельных затрат при заданном объеме выпуска должно закладываться в планы в качестве нормативного, то назовем функцию (4) нормативной функцией удельных затрат.

Если производственная функция *f(x)* является однородной первой степени, то нормативная функция удельных затрат не зависит от объема производства и связывает между собой нормативный уровень общих затрат на одну единицу стоимости продукции и нормы стоимости отдельных ресурсов i, т.е. $Z = \min cx = g(c)$, здесь $c=(c_1, \ldots, c_i)$.

Если построена производственная функция предприятия $f$ и известны его ресурсы $x$, то ожидаемый объем выпуска $Q$ определяется путем непосредственного вычисления значения функции $f$ в точке $x$. Используя норматив удельных затрат $z$, можно найти объем выпуска при данных ресурсах косвенным путем, через объем затрат. Так как отдача каждой единицы затрат должна согласно нормативу составить $1/z$ единиц продукции, затраты на использование ресурсов $x$, равные $cx$, должны обеспечить производство продукции в размере $cx/z$. Числитель и знаменатель этой дроби зависят от вектора $c$, но даже в наихудшем случае можно гарантировать выпуск в объеме:

$$h(x) = \min \frac{cx}{z} \qquad (5)$$

Назовем функцию *h(x)* нормативной функцией выпуска. Если уровень норматива удельных затрат согласован с нормативами $c_i$, т.е. нормативной функцией удельных затрат, а производственная функция является классической, то $h(x) = f(x)$.

Это означает, что в классической ситуации прямой (через производственную функцию) и косвенный (через нормативную функцию удельных затрат) способы определения объема выпуска при данных ресурсах равносильны.

Равенство (5) составляет содержание теоремы двойственности для классических производственных функций. Из нее вытекает, в частности, что функция $f(x)$ восстанавливается по функции $g(c)$, причем переход от $g(c)$ к $f(x)$ производится по той же формуле, что и переход от $f(x)$ к $g(c)$. С информационной точки зрения это означает, что функция удельных затрат $g(c)$ содержит столько же информации о деятельности производственной системы, сколько и ее производственная функция.

Свойство двойственности можно широко использовать в оптимальном планировании различного уровня. В общем виде задачу разработки оптимального плана можно сформулировать как задачу линейного программирования следующим образом: необходимо составить оптимальный план производства продукции $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий условиям:

$\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_j \le b_i, \quad i = 1,2,...,m_1 \le m$ - ограничение по имеющимся ресурсам;

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,...,n_1 < n$

при том, что общий доход предприятия должен быть максимальным

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j \to \max \tag{6}$$

где: $x_j$ - искомый объем $j$-го вида продукции;

$a_j$ - доход предприятия от единицы $j$-го вида продукции;

$c_{ij}$ - затраты $i$-го ресурса при производстве единицы $j$-го вида продукции;

$b_i$ - располагаемое количество $i$-го ресурса.

Аналогично, может быть сформулирована задача на минимум целевой функции (если в качестве критерия, например, будут выступать общие затраты), при этом неравенства $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_j \le b_i$, заменяются неравенствами $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_j \ge b_i$.

Тогда двойственная задача к общей задаче линейного программирования (на максимум) формулируется следующим образом: найти набор переменных $V = (v_1, v_2, ... , v_m)$ удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \cdot v_i \geq a_j, j = 1,2,...,n_1$$

$$v_i \geq 0, i = 1,2,...,m_1$$

и минимизирующих целевую функцию

$$\sum_{i=1}^{m} b_i v_i \rightarrow \min \tag{7}$$

где $v_i$ - оптимальная оценка, позволяющая взвесить относительную важность отдельных ресурсов $b_i$ для достижения максимального значения $\sum_{j=1}^{n} a_j x_i$.

Исходную задачу по отношению к двойственной обычно называют прямой. В том случае, когда исходная задача записана в общей форме, сразу видна симметричность прямой и двойственной задач: неравенство в одной задаче соответствует неотрицательная переменная в другой. Задача двойственная к двойственной всегда совпадает с прямой.

Результаты решения двойственной задачи могут рассматриваться как частные производные максимально (или минимально) достижимой величины целевой функции, взятые по отношению к свободным членам условий - ограничений. Ограничения в экономических задачах отражают, как правило, балансовые требования к тем или иным ресурсам. Поэтому в данной модели двойственной задачи получаемые отдельные оценки $v_i$ характеризуют предельные отношения приращений оптимальной величины целевой функции приращениям каждого $i$-го ресурса, от которого зависит достижение искомого оптимума (в экономическом анализе это предельные величины).

Поэтому решение двойственной задачи дает оценки значимости каждого вида ресурса для достижения той цели, которая ставится при рассмотрении данной экономической проблемы.

Эти оценки могут планироваться для проверки оптимальности принятых решений (плана). В линейных моделях все вошедшие в оптимальный план способы использования ресурсов должны быть бесприбыльными и безубыточными, а не вошедшие в план - бесприбыльными.

Характеризуя влияние на оптимальную величину целевой функции малых приращений ресурсов, оптимальные оценки представляют собой важное средство экономического анализа уже полученных решений.

Они позволяют определить направление изменений оптимального значения целевой функции в случаях изменения первоначальных условий - ограничений и целесообразность применения тех или иных новых способов использования ресурсов, неизвестных при первоначальной постановке задачи.

Весьма важным при формировании оптимальных планов является вытекающая из теоремы двойственности теорема равновесия, которая дает еще один необходимый и достаточный признак оптимальности допустимого решения задачи линейного программирования. В соответствии с этой теоремой оптимальные оценки ресурсов, неполностью используемых в оптимальном плане, должны быть равны нулю. Содержание этой теоремы практически может быть использовано при определении потенциала предприятий.

Понятие оптимальных оценок может быть обобщено на любую экономико-математическую модель оптимального использования ограниченных ресурсов, если только экстремальное значение принятого в модели критерия оптимальности представляет собой дифференцируемую функцию от величин, характеризующих балансовые соотношение производства и потребления по каждому виду ресурсов.

**Литература.**

1. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. - М.: "Наука", 1967.

2. Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение. - М.: "Финансы и статистика", 1986.

3. Максимов В.Ф. Микроэкономика. - М.: "Соминтек", 1996.

## ПОСТАНОВКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПЕРАТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

***Ю. Н. Павлючук, В. И. Павлючук***

*Экономический факультет, Брестский политехнический институт, г. Брест, Республика Беларусь*

Центральной задачей оперативного планирования является определение из числа предусмотренных текущим планом (с учетом степени его выполнения в предшествующий период) такого набора строительно-монтажных работ (СМР), которые могут и должны быть выполнены в течении ближайшего планируемого периода.