УДК 693.22.004.18

Листванович А.С.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ПОКРЫТИЙ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассматривается ребристое круговое цилиндрическое оболочечное покрытие, которое представляет собой систему, состоящую из тонкой многослойной обшивки и жестко с ней соединенных по линиям контакта продольных (стрингеры) и поперечных (шпангоуты) ребер.

Покрытие может быть загружено осевым сжатием, внешним давлением либо их совместным действием.

Криволинейная ортогональная система координат выбрана так, что координатные линии x и y совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности обшивки. Положение произвольной точки покрытия, не лежащей в срединной поверхности определяется третьей координатой z, нормальной к осям x, y. Положительным направлением для нее считается направление к центру кривизны обшивки; при этом принимается правая система координат.

Принимается, что расчет обшивки может быть выполнен с использованием линейной теории тонких упругих оболочек, основанной на сдвиговой модели типа Тимошенко [1], а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней с учетом деформации сдвига. При этом гипотеза прямолинейного недеформируемого элемента принимается справедливой как для всего пакета слоев обшивки, так и в целом для системы «обшивка-ребро» (в местах наличия ребер). Учитываются дискретность расположения ребер и их несимметричность относительно обшивки.

Потенциальная энергия упругой системы, подверженной действию заданных нагрузок, определяется как работа, совершаемая внутренними и внешними силами пи переводе системы из деформированного в начальное, недеформированное состояние. Обозначив через $\boldsymbol{U}$ потенциальную энергию внутренних сил и через $\boldsymbol{A}$ потенциальную энергию внешних сил, для полной потенциальной энергии системы $\boldsymbol{Э}$ получим выражение

$$\boldsymbol{Э} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}. \tag{1}$$

Потенциальная энергия внутренних сил, линейно зависящих от деформации, всегда положительна и вычисляется как половина произведения сил на соответствующие перемещения. В рассматриваемом случае ребристого цилиндрического оболочечного покрытия она складывается из потенциальной энергии деформации многослойной обшивки $\boldsymbol{U}_0$ и потенциальной энергии деформации подкрепляющих ребер $\boldsymbol{U_c}$ и $\boldsymbol{U_ш}$:

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U_0}+\boldsymbol{U_ш}+\boldsymbol{U_c}.$$

Потенциальная энергия деформации многослойной обшивки согласно [2] и принятым гипотезам (в соответствии с которыми пренебрегается нормальными напряжениями $\boldsymbol{\sigma_z}$ на площадках, параллельных срединной поверхности) записывается в виде:

$$U_0=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^S\left\{\sum_{S=1}^{m}\int_{h_s+1}^{h_s}\left(\sigma_x^s e_x^s+\sigma_x^s e_x^s+\tau_{xy}^s e_{xy}^s+\tau_{xz}^s e_{xz}^s+\tau_{yz}^s e_{yz}^s\right)dz\right\}dxdy \tag{2}$$

где $\boldsymbol{L}$ – длина покрытия (в направлении оси x); $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\pi R}$ – длина дуги срединной поверхности; $\boldsymbol{m}$ – число слоев обшивки; $\boldsymbol{\sigma_x^s}$, $\boldsymbol{\sigma_y^s}$ – нормальные напряжения $\boldsymbol{s}$-того слоя по направлениям осей x и y; $\boldsymbol{\tau_{xy}^s}$, $\boldsymbol{\tau_{xz}^s}$, $\boldsymbol{\tau_{yz}^s}$ – касательные напряжения в $\boldsymbol{s}$-том слое в соответствующих плоскостях; $\boldsymbol{e_x^s}$, …, $\boldsymbol{e_{yz}^s}$ – компоненты деформации в произвольной точке обшивки.

Учитывая, что:

$$e_x^s=\varepsilon_1+z(\xi_1+\Gamma_1); \qquad e_{xy}^s=\omega+z(\tau+\Gamma_3);$$
$$e_y^s=\varepsilon_2+z(\xi_2+\Gamma_2); \qquad e_{xz}^s=\Gamma_5; \tag{3}$$
$$e_x^s=0; \qquad e_{yz}^s=\Gamma_4,$$

где
$$\varepsilon_1=\frac{\partial U}{\partial x}; \qquad \varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{w}{R};$$
$$\omega=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y};$$
$$\xi_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \; \xi_2=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \qquad \tau=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}; \tag{4}$$

$\boldsymbol{\varepsilon_1}$, $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ – относительные продольные удлинения срединной поверхности обшивки в направлениях осей x и y;

$\boldsymbol{\omega}$– сдвиг срединной поверхности;

$\boldsymbol{\xi_1}$, $\boldsymbol{\xi_2}$ – изменение кривизн срединной поверхности;

$\boldsymbol{\tau}$ – кручение срединной поверхности.

Компоненты, учитывающие поперечные сдвиги:

$$\Gamma_1=\frac{\partial\psi_1}{\partial x}, \qquad \Gamma_2=\frac{\partial\psi_2}{\partial y}, \qquad \Gamma_3=\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x},$$
$$\Gamma_4=\psi_2, \qquad \Gamma_5=\psi_1, \tag{5}$$

$$\sigma_x^s=B_{11}^s\varepsilon_1+B_{12}^s\varepsilon_2+z\left[B_{11}^s(\xi_1+\Gamma_1)+B_{12}^s(\xi_2+\Gamma_2)\right],$$
$$\sigma_y^s=B_{21}^s\varepsilon_1+B_{22}^s\varepsilon_2+z\left[B_{21}^s(\xi_1+\Gamma_1)+B_{22}^s(\xi_2+\Gamma_2)\right]$$
$$\tau_{yz}^s=B_{44}^s\Gamma_4; \qquad \tau_{xz}^s=B_{55}^s\Gamma_5; \tag{6}$$
$$\tau_{xy}^s=B_{66}^s\omega+zB_{66}^s(\tau+\Gamma_6).$$

$$B_{11}^s=\frac{E_1^s}{1-\mu_{12}^s\mu_{21}^s}; \qquad B_{22}^s=\frac{E_2^s}{1-\mu_{12}^s\mu_{21}^s};$$
$$B_{12}^s=B_{21}^s=-\frac{\nu_{12}^s E_1^s}{1-\mu_{12}^s\mu_{21}^s};$$
$$B_{44}^s=G_{23}^s; \qquad B_{55}^s=G_{13}^s; \qquad B_{66}^s=G_{12}^s. \tag{7}$$

$\boldsymbol{E_1^s}$, $\boldsymbol{E_2^s}$ – модули Юнга для материала $\boldsymbol{s}$-того слоя обшивки по направлениям x и y;

$\boldsymbol{G_{23}^s}$, $\boldsymbol{G_{13}^s}$, $\boldsymbol{G_{12}^s}$ – модули сдвига материала $\boldsymbol{s}$-того слоя обшивки, характеризующие изменение углов между главными направлениями y и z, x и z, x и y соответственно;

$\boldsymbol{\mu_{12}^s}$, $\boldsymbol{\mu_{21}^s}$ –коэффициенты Пуассона материала $\boldsymbol{s}$-того слоя обшивки по направлениям x и y.

Интегрируя по z и суммируя по слоям, получим выражение потенциальной энергии деформации в виде (8).

Листванович Александр Сергеевич. *Аспирант каф. строительной механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

$$U_0 = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^s \Big[C_{11}\varepsilon_1^2 + 2C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_2^2 + C_{66}W^2 + D_{11}\xi_1^2 + 2D_{12}\xi_1\xi_2 + D_{22}\xi_2^2 + D_{66}\tau^2 + $$
$$+ k_0C_{55}\Gamma_5^2 + k_0C_{44}\Gamma_4^2 + D_{11}\left(2\xi_1\Gamma_1 + \Gamma_1^2\right) + +2D_{12}\left(\xi_1\Gamma_2 + \xi_2\Gamma_1 + \Gamma_1\Gamma_2\right) + D_{22}\left(2\xi_2\Gamma_2 + \Gamma_2^2\right) + D_{66}\left(2\tau\Gamma_3 + \Gamma_3^2\right)\Big]dxdy, \qquad (8)$$

где C_{jk}, D_{jk} – жесткости обшивки.

$$U_C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_0^L\left[E_cF_c\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + k_cG_cF_c\psi_i^2 + E_cJ_{yc}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right)^2 + G_cJ_{крс}\left(\frac{\partial\varphi_{крi}}{\partial x}\right)^2\right]dx\,; \qquad (10)$$

$$U_ш = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_1}\int_0^S\left[E_шF_ш\left(\frac{\partial v_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R}\right)^2 + k_шG_шF_ш\psi_j^2 + E_шJ_{xш}\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} - \frac{w_j}{R^2}\right)^2 + G_шJ_{крш}\left(\frac{\partial\varphi_{крj}}{\partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi_{крj}}{\partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial U_j}{\partial y}\right)^2\right]dy, \qquad (10.1)$$

где k_c, $k_ш$ – коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения касательных напряжений.

$$A = A_{01} + A_{02} + A_C + A_Ш = \frac{h}{2}\int_0^L\int_0^s\left[-\sigma_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \sigma_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2}\right)w\right]dxdy - \frac{\sigma_xF_C}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_0^L\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2dx + $$
$$+ \frac{\sigma_yF_Ш}{2}\sum_{j=1}^{k}\int_0^S\left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + \frac{w_j}{R^2}\right)w_jdy \qquad (19)$$

$$Э = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^s\left\{C_{11}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + 2C_{12}\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{w}{R}\right) + C_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}\right)^2 + C_{66}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \right.$$
$$+ D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 + k_0C_{55}\psi_1^2 + k_0C_{44}\psi_2^2 + $$
$$+ D_{11}\left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2\right) + 2D_{12}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) + $$
$$+ D_{22}\left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)^2\right) + D_{66}\left(-4\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)^2\right) - $$
$$\left.\cdot -\sigma_xh\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \sigma_yh\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2}\right)w\right\}dxdy + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_0^L\left\{E_CF_C\left[\frac{\partial U}{\partial x} + h_C\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)\right]^2 + \right.$$
$$\left. + k_cG_cF_c\psi_1^2 + E_cJ_{yc}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + G_cJ_{крс}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - \sigma_xF_c\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}\Bigg|_{y=y_i}dx + $$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_1}\int_0^S\left\{E_шF_ш\left[\frac{\partial v}{\partial y} + h_ш\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) - \frac{w}{R}\right]^2 + k_шG_шF_ш\psi_2^2 + E_шJ_{xш}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{w}{R^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + G_шJ_{крш}\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{h_ш}{R}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)\right]^2 + \sigma_yF_ш\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2}\right)w\right\}\Bigg|_{x=x_j}dy\,. \qquad (20)$$

Для слоистой оболочки, составленной из нечетного ($2m_c+1$) числа слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности:

$$C_{jk} = 2\left[B_{jk}^{m_c+1}\cdot h_{m_c+1} + \sum_{s=1}^{m_c}B_{jk}^s\left(h_s - h_{s+1}\right)\right]; \qquad (9)$$

$$D_{jk} = \frac{2}{3}\left[B_{jk}^{m_c+1}\cdot h_{m_c+1}^3 + \sum_{s=1}^{m_c}B_{jk}\left(h_s^3 - h_{s+1}^3\right)\right].$$

Потенциальная энергия деформации ребер (стрингеров и шпангоутов), подкрепляющих обшивку, записывается с учетом энергий изгиба, сжатия, кручения и сдвига (при этом принимается, что энергией изгиба и сдвига ребер из их плоскости можно пренебречь) (10-10.1).

Потенциальная энергия внешних сил определяется как полная величина произведения силы на перемещение и всегда отрицательна. Величина ее может быть выражена через напряжения в оболочке σ_x и σ_y, возникающие при действии внешних нагрузок q_1 и q_2 и связанные с ними соотношениями:

$$\sigma_x = k_{FC} q_1 \frac{R}{h}, \qquad \sigma_y = k_{FШ} q_2 \frac{R}{h}, \tag{11}$$

где $$k_{FC} = \frac{1}{1 + \dfrac{F_C \cdot k}{\pi Rh}}; \qquad k_{FШ} = \frac{1}{1 + \dfrac{F_Ш}{h \cdot l_Ш}}; \tag{12}$$

$l_ш = L/(k_1 + 1)$ – расстояние между шпангоутами по длине покрытия.

Продольные усилия, действующие на оболочку, при переводе ее из деформированного состояния в начальное, недеформированное состояние совершают работу

$$A_{01} = -\int_0^s \sigma_x h \Delta L dy. \tag{13}$$

Сближение торцов оболочки при изгибе ее образующей определяется выражением

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), находим

$$A_{01} = -\frac{h}{2} \int_0^L \int_0^s \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dxdy. \tag{15}$$

Аналогично определяется выражение и для работы сжимающих сил, действующих на продольные ребра.

Для определения потенциальной энергии внешнего радиального давления учтем влияние кольцевых усилий на изгиб оболочки путем введения эквивалентной радиальной нагрузки, интенсивность которой определяется по следующей формуле [3]

$$\tilde{q}_2 = -q_2 R \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right). \tag{16}$$

Эта нагрузка при переводе покрытия из деформированного состояния в начальное, недеформированное состояние совершает работу

$$A_{02} = -\int_0^L \int_0^s \tilde{q}_2 w dxdy, \tag{17}$$

выражение которой с учетом (16) и соотношения $q_2 = \sigma_y h / 2R$ принимает вид

$$A_{02} = \frac{h}{2} \int_0^L \int_0^s \sigma_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right) w dxdy. \tag{18}$$

Аналогично изложенному получается и выражение для работы внешнего радиального давления, действующего на шпангоуты.

Потенциальная энергия внешних нагрузок теперь запишется в виде (19).

Подставляя в (8) выражения (4) и (5), согласно (1) получим выражение полной потенциальной энергии через перемещения срединной поверхности оболочечного покрытия (20).

Определение критических напряжений на основе энергетического метода связано с выбором аппроксимирующих выражений для функций перемещений, описывающих деформированное состояние ребристого цилиндрического оболочечного покрытия при потере устойчивости и удовлетворяющих граничным условиям. Будем считать, что на концах оболочечного покрытия обеспечены условия шарнирного опирания и что до потери устойчивости покрытие сохраняет свою первоначальную (цилиндрическую) форму.

Расположив начало координат в торце покрытия на оси одного из стрингеров, примем выражения для аппроксимирующих функций перемещений в виде:

$$\begin{aligned}
u &= \sum_n \sum_m a_{mn} \cos\frac{\pi nx}{L} \cos\frac{\pi my}{S}; \\
v &= \sum_n \sum_m в_{mn} \cos\frac{\pi nx}{L} \sin\frac{\pi my}{S}; \\
w &= \sum_n \sum_m c_{mn} \sin\frac{\pi nx}{L} \sin\frac{\pi my}{S}; \\
\psi_1 &= \sum_n \sum_m d_{mn} \cos\frac{\pi nx}{L} \sin\frac{\pi my}{S}; \\
\psi_2 &= \sum_n \sum_m e_{mn} \sin\frac{\pi nx}{L} \cos\frac{\pi my}{S},
\end{aligned} \tag{21}$$

где m – число полуволн вдоль образующей обшивки (вдоль оси x); n – число полуволн вдоль дуги обшивки; a_{mn}, $в_{mn}$, c_{mn}, d_{mn}, e_{mn} – неизвестные параметры перемещений.

Принятые зависимости для компонент перемещений (21) подставляются в выражение полной потенциальной энергии (20). Выполнив интегрирование полученного выражения получим полную потенциальную энергию в виде квадратичной функции неизвестных параметров перемещений, число которых будет соответствовать количеству членов, удерживаемых в рядах, аппроксимирующих перемещения.

Критическую нагрузку будем определять методом Ритца, который основан на использовании свойства экстремальности полной потенциальной энергии упругих систем в состоянии равновесия. Необходимое условие экстремальности полной потенциальной энергии в виде равенства нулю частных производных по всем параметрам перемещений a_{mn}, $в_{mn}$, c_{mn}, d_{mn}, e_{mn} приводит к системе однородных линейных алгебраических уравнений. Потере устойчивости покрытия соответствует нетривиальное решение этой системы уравнений, что возможно лишь в случае, когда ее определитель равен нулю. Это условие приводит к уравнению, минимальный корень которого и является расчетным параметром критической нагрузки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 532 с.