

щений узлов конструкции; P - матрица нагрузки с учетом граничных условий. По перемещениям узлов конструкции находятся перемещения начала и конца каждого отдельного стержня в системе координат связанной со стержнем, а по местным перемещениям усилия в стержнях.

Разработанная методика численного расчета использована в вычислительном комплексе статического расчета пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля.

УДК 624.94.012.4.044

Туснин А.Р.

КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ В УЗЛАХ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОВ И НЕСИММЕТРИЧНОМ СЕЧЕНИИ

В общем случае в пространственной конструкции находят применение тонкостенные стержни открытого профиля, у которых центры тяжести и изгиба не совпадают. При этом в узлах чаще всего имеет место несовпадение центра узла с центрами изгиба или центрами тяжести примыкающих стержней. Следствием этого является значительное усложнение матрицы жесткости тонкостенного конечного элемента (ТКЭ). Это обусловлено, как наличием эксцентриситетов по концам стержня, так и с тем, что именно центр изгиба является той точкой сечения, перемещения которой определяют появление в стержне поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов, бимоментов.

Рассмотрим профиль, имеющий несовпадение центров тяжести и изгиба с эксцентричным закреплением в начале и конце. Обозначим систему координат, связанную с центром узла- $X_1 Y_1 Z_1$, систему координат, связанную с центром изгиба- $X'_1 Y'_1 Z'_1$, систему координат, связанную с центром и тяжести- $X''_1 Y''_1 Z''_1$. Введем обозначения y_n - эксцентриситет центра тяжести относительно центра узла по оси Y_1 в начале стержне, y_k - то же в конце, z_n - эксцентриситет центра относительно центра узла по оси Z_1 в начале стержне, z_k - то же в конце, y - координата центра тяжести относительно центра изгиба по оси Y'_1 , z - координата центра тяжести относительно центра изгиба по оси Z'_1 , ω_n - секториальная координата центра тяжести относительно центра узла в начале стержне, ω_k - то же в конце.

Пусть конец стержня жестко закреплен, а начало имеет все возможные перемещения. Обозначим перемещения центра узла:

- u_1 - линейное перемещение вдоль оси X_1 ;
- v_1 - линейное перемещение вдоль оси Y_1 ;
- w_1 - линейное перемещение вдоль оси Z_1 ;
- α_1 - угол поворота относительно оси X_1 ;
- β_1 - угол поворота относительно оси Y_1 ;
- γ_1 - угол поворота относительно оси Z_1 ;
- δ - депланация в центре узла.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Р.А.Резников. Решение задач строительной механики на ЭЦВМ. М., 1971. 312 с.
2. А.Р.Туснин. Тонкостенный конечный элемент для расчета на ЭВМ стержневых конструкций//Современные строительные конструкции. Проблемы и перспективы: Материалы XIX научно-технической конференции. Брест, 1995.- с.23-28.

Возможные перемещения центра изгиба сечения:

- u'_1 - линейное перемещение вдоль оси X'_1 ;
- v'_1 - линейное перемещение вдоль оси Y'_1 ;
- w'_1 - линейное перемещение вдоль оси Z'_1 ;
- α'_1 - угол поворота относительно оси X'_1 ;
- β'_1 - угол поворота относительно оси Y'_1 ;
- γ'_1 - угол поворота относительно оси Z'_1 ;
- δ' - депланация в центре тяжести и изгиба сечения.

Возможные перемещения центра тяжести сечения:

- u''_1 - линейное перемещение вдоль оси X''_1 ;
- v''_1 - линейное перемещение вдоль оси Y''_1 ;
- w''_1 - линейное перемещение вдоль оси Z''_1 ;
- α''_1 - угол поворота относительно оси X''_1 ;
- β''_1 - угол поворота относительно оси Y''_1 ;
- γ''_1 - угол поворота относительно оси Z''_1 ;
- δ'' - депланация в центре тяжести и изгиба сечения.

В общем случае, при одновременном неравенстве нулю эксцентриситетов по осям Y_1 и Z_1 , и несовпадении центров тяжести и изгиба одинаковыми для всех трех центров являются только угол поворота относительно продольной оси и депланация, т.е. выполняются следующие равенства:

$$\alpha_1 = \alpha'_1 = \alpha''_1 ; \delta_1 = \delta'_1 = \delta''_1 . \quad (1)$$

Продольное усилие в стержне появляется в результате линейного перемещения вдоль продольной оси центра тяжести стержня. Для определения линейного перемещения вдоль продольной оси можно использовать соотношение:

$$u''_1 = u_1 + \beta_1 z_n - \gamma_1 y_n + \delta_1 \omega_n . \quad (2)$$

Для определения поперечных сил, изгибающих и крутящего моментов, также бимоментов необходимо знать перемещения $v'_1, w'_1, \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \delta'_1$ центра изгиба.

Таблица 1 - Матрица жесткости ТКЭ при не совпадении центров тяжести и изгиба и наличии в узлах эксцентриситетов.

	u_1^H	v_1^H	w_1^H	α_1^H	β_1^H	γ_1^H	δ_1^H	u_1^K	v_1^K	w_1^K	α_1^K	β_1^K	γ_1^K	δ_1^K
u_1^H	$r_{1,1}$				$r_{1,5}$	$r_{1,6}$	$r_{1,7}$	$r_{1,8}$				$r_{1,12}$	$r_{1,13}$	$r_{1,14}$
v_1^H		$r_{2,2}$		$r_{2,4}$		$r_{2,6}$	$r_{2,7}$		$r_{2,9}$		$r_{2,11}$		$r_{2,13}$	$r_{2,14}$
w_1^H			$r_{3,3}$	$r_{3,4}$	$r_{3,5}$		$r_{3,7}$			$r_{3,10}$	$r_{3,11}$	$r_{3,12}$		$r_{3,14}$
α_1^H				$r_{4,4}$	$r_{4,5}$	$r_{4,4}$	$r_{4,7}$		$r_{4,9}$	$r_{4,10}$	$r_{4,11}$	$r_{4,12}$	$r_{4,13}$	$r_{4,14}$
β_1^H					$r_{5,5}$	$r_{5,6}$	$r_{5,7}$	$r_{5,8}$		$r_{5,10}$	$r_{5,11}$	$r_{5,12}$	$r_{5,13}$	$r_{5,14}$
γ_1^H						$r_{6,6}$	$r_{6,7}$	$r_{6,8}$	$r_{6,9}$		$r_{6,11}$	$r_{6,12}$	$r_{6,13}$	$r_{6,14}$
δ_1^H							$r_{7,7}$	$r_{7,8}$	$r_{7,9}$	$r_{7,10}$	$r_{7,11}$	$r_{7,12}$	$r_{7,13}$	$r_{7,14}$
u_1^K								$r_{8,8}$				$r_{8,12}$	$r_{8,13}$	$r_{8,14}$
v_1^K									$r_{9,9}$		$r_{9,11}$		$r_{9,13}$	$r_{9,14}$
w_1^K										$r_{10,10}$	$r_{10,11}$	$r_{10,12}$		$r_{10,14}$
α_1^K											$r_{11,11}$	$r_{11,12}$	$r_{11,13}$	$r_{11,14}$
β_1^K												$r_{12,12}$	$r_{12,13}$	$r_{12,14}$
γ_1^K													$r_{13,13}$	$r_{13,14}$
δ_1^K														$r_{14,14}$

Симметрично относительно главной диагонали

Перемещения по осям Y_1' и Z_1' складываются из перемещений центра узла по осям Y_1 и Z_1 , а также приращений перемещений по осям Y_1' и Z_1' вызванных поворотом центра узла относительно оси X_1 . Приращения перемещений равны произведению эксцентриситетов центра изгиба сечения относительно центра узла на величину угла закручивания α_1 . Эксцентриситеты центра изгиба относительно центра узла составляют:

$$\text{в начале стержня: } \Delta y_n = y_n - y; \Delta z_n = z_n - z; \quad (3)$$

$$\text{в конце стержня: } \Delta y_k = y_k - y; \Delta z_k = z_k - z. \quad (4)$$

При положительном угле закручивания приращение перемещения центра изгиба по оси Y_1' отрицательное, по оси Z_1' положительное. Перемещения центра изгиба по осям Y_1' и Z_1' выраженные через перемещения центра узла составляют:

$$v_1' = v_1 - \alpha_1 \Delta z_n; w_1' = w_1 + \alpha_1 \Delta y_n. \quad (5)$$

При несовпадении центра узла с центром изгиба возможная депланация в центре узла вызывает появление приращений углов поворота сечения относительно осей Y_1' и Z_1' в центре изгиба. Углы поворота центра изгиба относительно осей Y_1' и Z_1' складываются из углов поворота центра узла относительно осей Y_1 и Z_1 и приращений углов поворота сечения относительно осей Y_1' и Z_1' в центре изгиба из-за депланации сечения. Углы поворота центра изгиба относительно осей Y_1' и Z_1' выраженные через перемещения центра узла составляют:

$$\beta_1' = \beta_1 - \delta_1 \Delta y_n; \gamma_1' = \gamma_1 - \delta_1 \Delta z_n. \quad (6)$$

Аналогичные рассуждения можно выполнить для конца стержня, тогда связь между перемещениями центра узла в конце с перемещениями центра тяжести и изгиба будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1'; \delta_1 = \delta_1'; u_1' = u_1 + \beta_1 z_k - \gamma_1 y_k + \delta_1 \omega_k; \\ v_1' &= v_1 - \alpha_1 \Delta z_k; w_1' = w_1 + \alpha_1 \Delta y_k; \\ \beta_1' &= \beta_1 - \delta_1 \Delta y_k; \gamma_1' = \gamma_1 - \delta_1 \Delta z_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Из-за несовпадения центра тяжести сечения с центром узла от продольной силы в стержне в связях, наложенных на центр узла, кроме реакции по оси X_1 возникают дополнительные моменты относительно осей Y_1 и Z_1 , равные произведению продольной силы на соответствующие эксцентриситеты, и изгибно-крутящий бимомент, равный произведению продольной силы на секториальную координату центра тяжести. Несовпадение центра изгиба с центром узла ведет к появлению в связи на депланацию центра узла дополнительных бимоментов, равных произведению изгибающих моментов в стержне на соответствующие эксцентриситеты, которые для стержня с несовпадающими центрами тяжести и изгиба не равны эксцентриситетам центра тяжести. По этой же причине в связи на угол поворота относительно оси X_1 от поперечных сил, действующих в стержне, возникают дополнительные моменты, равные произведению поперечных сил на соответствующие эксцентриситеты, равные эксцентриситетам центра изгиба.

Для определения реакций в связях, наложенных на центры узлов, с учетом соотношений (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) определяются перемещения центров тяжести и изгиба в зависимости от перемещений узлов. Продольное усилие в стержне вычисляется по продольным перемещениям центра тяжести. Поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты, бимомент в стержне вычисляются в зависимости от перемещений центра изгиба. После определения усилий в стержне вычисляются реакции в связях с учетом эксцентриситетов и секториальных площадей центров тяжести и изгиба относительно центров узлов. Матрица жесткости стержня при несовпадении центров тяжести и изгиба и наличии в узлах эксцентриситетов симметрична относительно главной диагонали.

Матрица жесткости тонкостенного стержня открытого профиля при несовпадении центра тяжести с центром изгиба и наличии в узлах эксцентриситетов в местной системе координат имеет вид, представленный в таблице 1. Дополнительные члены и члены матрицы жесткости, отличающиеся от членов матрицы жесткости стержня при совпадении центров тяжести и изгиба и отсутствии в узлах эксцентриситетов [1],

выполнены в таблице 2.4 полужирными символами. Матрица жесткости симметрична относительно главной диагонали, поэтому в таблице 1 показаны только члены, расположенные справа и сверху относительно главной диагонали. Коэффициенты $\alpha, \gamma, \lambda, \mu$, используемые при определении реакций в связях, вычисляются с применением соотношения, принятых в [1].

Дополнительные члены и члены матрицы жесткости не совпадающие с членами матрицы, представленной в [1] равны:

$$\begin{aligned}
 r_{1,5} &= \frac{EA}{l} z_n, & r_{1,6} &= -\frac{EA}{l} y_n, & r_{1,7} &= \frac{EA}{l} \omega_n, \\
 r_{1,12} &= -\frac{EA}{l} z_k, & r_{1,13} &= \frac{EA}{l} y_k, & r_{1,14} &= -\frac{EA}{l} \omega_k, \\
 r_{2,4} &= -\frac{12EI_z}{l^3} \Delta z_n, & r_{2,7} &= -\frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_n, \\
 r_{2,11} &= \frac{12EI_z}{l^3} \Delta z_k, & r_{2,14} &= -\frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_k, \\
 r_{3,4} &= \frac{12EI_y}{l^3} \Delta y_n, & r_{3,7} &= \frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_n, \\
 r_{3,11} &= -\frac{12EI_y}{l^3} \Delta y_k, & r_{3,14} &= \frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_k, \\
 r_{4,4} &= \frac{EI_\omega}{l^3} \lambda + \frac{12EI_y}{l^3} \Delta y_n^2 + \frac{12EI_z}{l^3} \Delta z_n^2, \\
 r_{4,5} &= -\frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_n, & r_{4,6} &= -\frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_n, \\
 r_{4,7} &= \frac{EI_\omega}{l^2} \alpha + \frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_n^2 + \frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_n^2, \\
 r_{4,9} &= \frac{12EI_z}{l^3} \Delta z_n, & r_{4,10} &= -\frac{12EI_y}{l^3} \Delta y_n, \\
 r_{4,11} &= -\frac{EI_\omega}{l^3} \lambda - \frac{12EI_y}{l^3} \Delta y_k \Delta y_n - \frac{12EI_z}{l^3} \Delta z_k \Delta z_n, \\
 r_{4,12} &= -\frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_n, & r_{4,13} &= -\frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_n, \\
 r_{4,14} &= \frac{EI_\omega}{l^2} \alpha + \frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_k \Delta y_n + \frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_k \Delta z_n, \\
 r_{5,5} &= \frac{4EI_y}{l} + \frac{EA}{l} z_n^2, & r_{5,6} &= -\frac{EA}{l} y_n z_n, \\
 r_{5,7} &= \frac{EA}{l} z_n \omega_n - \frac{4EI_y}{l} \Delta y_n, & r_{5,8} &= -\frac{EA}{l} z_n, \\
 r_{5,11} &= \frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_k, & r_{5,12} &= \frac{2EI_y}{l} - \frac{EA}{l} z_k z_n, \\
 r_{5,13} &= \frac{EA}{l} y_k z_n, & r_{5,14} &= -\frac{EA}{l} z_n \omega_k - \frac{2EI_y}{l} \Delta y_k, \\
 r_{6,6} &= \frac{4EI_z}{l} + \frac{EA}{l} y_n^2, & r_{6,7} &= -\frac{EA}{l} y_n \omega_n - \frac{4EI_z}{l} \Delta z_n, \\
 r_{6,8} &= \frac{EA}{l} y_n, & r_{6,11} &= \frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_k,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{6,12} &= \frac{EA}{l} z_k y_n, & r_{6,13} &= \frac{2EI_z}{l} - \frac{EA}{l} y_k y_n, \\
 r_{6,14} &= \frac{EA}{l} y_n \omega_k - \frac{2EI_z}{l} \Delta z_k, \\
 r_{7,7} &= \frac{EI_\omega}{l^2} \mu + \frac{EA}{l} \omega_n^2 + \frac{4EI_y}{l} \Delta y_n^2 + \frac{4EI_z}{l} \Delta z_n^2, \\
 r_{7,8} &= -\frac{EA}{l} \omega_n, & r_{7,9} &= \frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_n, & r_{7,10} &= -\frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_n, \\
 r_{7,11} &= -\frac{EI_\omega}{l^2} \alpha - \frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_k \Delta y_n - \frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_k \Delta z_n, \\
 r_{7,12} &= -\frac{EA}{l} z_k \omega_n - \frac{2EI_y}{l} \Delta y_n, \\
 r_{7,13} &= -\frac{EA}{l} y_k \omega_n - \frac{2EI_z}{l} \Delta z_n, \\
 r_{7,14} &= \frac{EI_\omega}{l^2} \gamma - \frac{EA}{l} \omega_k \omega_n + \frac{2EI_y}{l} \Delta y_k \Delta y_n + \frac{2EI_z}{l} \Delta z_k \Delta z_n, \\
 r_{8,12} &= \frac{EA}{l} z_k, & r_{8,13} &= -\frac{EA}{l} y_k, & r_{8,14} &= \frac{EA}{l} \omega_k, \\
 r_{9,11} &= -\frac{12EI_z}{l^3} \Delta z_k, & r_{9,14} &= \frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_k, \\
 r_{10,11} &= \frac{12EI_y}{l^3} \Delta y_k, & r_{10,14} &= -\frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_k, \\
 r_{11,11} &= \frac{EI_\omega}{l^3} \lambda + \frac{12EI_y}{l^3} \Delta y_k^2 + \frac{12EI_z}{l^3} \Delta z_k^2, \\
 r_{11,12} &= \frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_k, & r_{11,13} &= \frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_k, \\
 r_{11,14} &= -\frac{EI_\omega}{l^2} \alpha - \frac{6EI_y}{l^2} \Delta y_k^2 - \frac{6EI_z}{l^2} \Delta z_k^2, \\
 r_{12,12} &= \frac{4EI_y}{l} + \frac{EA}{l} z_k^2, & r_{12,13} &= -\frac{EA}{l} y_k z_k, \\
 r_{12,14} &= \frac{EA}{l} z_k \omega_k - \frac{4EI_y}{l} \Delta y_k, \\
 r_{13,13} &= \frac{4EI_z}{l} + \frac{EA}{l} y_k^2, \\
 r_{13,14} &= -\frac{EA}{l} y_k \omega_k - \frac{4EI_z}{l} \Delta z_k, \\
 r_{14,14} &= \frac{EI_\omega}{l^2} \mu + \frac{EA}{l} \omega_k^2 + \frac{4EI_y}{l} \Delta y_k^2 + \frac{4EI_z}{l} \Delta z_k^2.
 \end{aligned}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Туснин А.Р. Конечный элемент тонкостенного стержня открытого профиля с двумя осями симметрии и отсутствии эксцентриситетов в узлах// «Вестник БПИ-Строительство и архитектура», №1, 2000-с.65-67.